Certains corrigés sont très détaillés, d'autres le sont moins, n'hésitez pas à me contacter si vous souhaitez avoir des explications supplémentaires sur certaines questions.

Il est très probable que ce document contienne encore des erreurs, n'hésitez pas non plus à m'en faire part.

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, à quoi est égal $2^n + 2^n$?

a) 4^n b) 4^{n+1} c) 2^{n+1} d) 3^n

Réponse : c)

On a :

$$2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$

---

2. À quoi est égal $\dfrac{4^{12}}{2^{25}}$?

a) $\dfrac{1}{2^{11}}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) 2 d) 2^{-13}

Réponse : b)

On a :

$$\frac{4^{12}}{2^{25}} = \frac{(2^2)^{12}}{2^{25}} = \frac{2^{24}}{2^{25}} = 2^{24-25} = \frac{1}{2}$$

---

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, à quoi est égal $2^n \times 2^n$?

a) 2^{2n} b) 2^{2+n} c) 2^{n^2} d) 4^{2n}

Réponse : a)

On a :

$$2^n \times 2^n = 2^{n+n} = 2^{2n}$$

---

4. Soit $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, à quoi est égal $2^n \times 3^m$?

a) 6^{mn} b) cela ne se simplifie pas c) 6^{n+m} d) 5^{m+n}

Réponse : b)

Cette expression ne se simplifie pas particulièrement.

---

5. À quoi est égal $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$?

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}^{2\sqrt{2}}$ c) cela ne se simplifie pas d) 2

Réponse : d)

On a :

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

---

6. Soit $n \in \mathbb{N}$, à quoi est égal $(-1)^{-2n-1}$?

a) -1 b) 1 c) cela dépend de la parité de n d) $2n+1$

Réponse : a)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $-2n-1$ est un entier relatif impair donc $(-1)^{-2n-1} = -1$.

Exercice 2

1. $A = 2^{3^2} = 2^9 = 512$
2. $B = (2^3)^2 = 2^{3\times 2} = 2^6 = 64$
3. $C = 2^6 = 64$
4. $D = (2^3)^4 = 2^{3\times 4} = 2^{12} = 4096$
5. $E = (2^4)^3 = 2^{4\times 3} = 2^{12} = 4096$
6. $F = (3^6)^5 - (9^5)^3 = 3^{30} - (3^2)^{15} = 3^{30} - 3^{30} = 0$

Exercice 3

1. $A = 2^{n+3} = 2^n \times 2^3 = 8a$
2. $B = 2^{2n+1} = (2^n)^2 \times 2 = 2a^2$
3. $C = 2^{-2n} = (2^n)^{-2} = a^{-2}$
4. $D = \dfrac{4^{n+1}}{2^{1-3n}} = \dfrac{4 \times (2^n)^2}{2 \times (2^n)^{-3}} = \dfrac{4a^2}{2a^{-3}} = 2a^5$
5. $E = 2^{n+3} - 2^{2n} + 5 \times 2^{n+1} - 3 \times 2^{n+2} = 2^3 \times 2^n - (2^n)^2 + 10 \times 2^n - 12 \times 2^n = 8a - a^2 + 10a - 12a = 6a - a^2$
6. $F = (-2)^{2n+3} = (-1)^{2n+3}(2^n)^2 2^3 = -8a^2$
7. $G = \dfrac{1}{(-2)^{3n-2}} = \dfrac{1}{(-1)^{3n-2}(2^n)^3 2^{-2}} = \dfrac{1}{(-1)^{3n-2}a^3 2^{-2}} = 4 \times (-1)^{3n-2}a^{-3}$
8. $H = 8^{2n} = (2^n)^{3\times 2} = a^6$

Exercice 4

► Prenons d'abord $q \in \mathbb{C}$ avec $q \neq 1$. La formule étant donnée, il est possible de faire une récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, en considérant l'hypothèse :

$$\mathcal{H}_n \ : \ \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

• **Initialisation.** Pour $n = 0$, la somme ne possède qu'un terme q^0 qui est égal à 1 et la formule du membre de droite donne $\dfrac{1-q}{1-q}$ qui vaut 1. La propriété $\mathcal{H}_0$ est vérifiée.

• **Hérédité.** On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie pour un certain entier naturel n fixé. Démontrons la formule au rang $n+1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}(1-q)}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

Ce qui démontre la formule au rang $n+1$ et termine la récurrence.
On conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $q \in \mathbb{C}$ avec $q \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

► Pour le cas où $q = 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} 1^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$$

car on somme $n+1$ fois la constante 1.

► Les formules où la somme commence à m peuvent se démontrer de même par récurrence.

Remarque. *Ces formules sont à bien connaitre, elles seront très utiles cette année. Vous penserez à ne pas oublier le cas où la raison q vaut 1.*

Exercice 5 On applique la seconde formule du théorème avec $m = 3$ et "$n = n - 1$", cela donne :

$$\sum_{k=3}^{n-1} q^k = \begin{cases} q^3 \times \dfrac{1-q^{n-3}}{1-q} & \text{si} \quad q \neq 1 \\ n-3 & \text{si} \quad q = 1 \end{cases}$$

Exercice 6

1. On applique la formule de l'encadré avec $q = \dfrac{1}{2}$, pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

2. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2$.

Remarque. *On peut écrire* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$.

Exercice 7 On transforme la somme pour se ramener aux formules connues :

$$\sum_{k=1}^{100}(2a^{3k+1}+2) = 2a\sum_{k=1}^{100}(a^3)^k + \sum_{k=1}^{100} 2 = 2a \times a^3 \sum_{k=0}^{99}(a^3)^k + 200 = 2a^4\frac{1-a^{300}}{1-a^3} + 200$$

Le calcul précédent est valable lorsque $a \neq 1$. Si $a = 1$, la somme vaut 400.

Exercice 8 On applique la formule de la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} i^k = \frac{1-i^{n+1}}{1-i}$$

- Si $n = 0$ [4] alors $i^{n+1} = i$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} i^k = 1$.
- Si $n = 1$ [4] alors $i^{n+1} = -1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} i^k = \frac{2}{1-i} = 1+i$.
- Si $n = 2$ [4] alors $i^{n+1} = -i$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} i^k = \frac{1+i}{1-i} = i$.
- Si $n = 3$ [4] alors $i^{n+1} = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} i^k = 0$.

Remarque. *La notation $n = j$ [4] avec $j \in \{0,1,2,3\}$ signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 4k + j$.*

Exercice 9

1. $A = \dfrac{xt}{yz}$ 2. $B = \dfrac{y+z}{t}$ 3. $C = \dfrac{xyz}{t}$ 4. $D = \dfrac{1}{12}$ 5. $E = -\dfrac{10}{3}$

6. $F = \dfrac{27}{2}$ 7. $G = 6$ 8. $H = 99$ 9. $I = \dfrac{89}{90}$ 10. $J = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

11. $K = \dfrac{5}{36}$ 12. $L = -\dfrac{5}{16}$ 13. $M = -\dfrac{1}{25}$ 14. $N = -\dfrac{16}{35}$ 15. $O = -\dfrac{4x-1}{5x+5}$

Exercice 10 C'est surprenant mais cette égalité est vérifiée. Pour cela, on peut utiliser la formule suivante, pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Vous pouvez développer pour vous convaincre de la véracité de cette égalité. Ici cela donne :

$$\frac{37^3+13^3}{37^3+24^3} = \frac{(37+13)(37^2-37\times 13+13^2)}{(37+24)(37^2-37\times 24+24^2)} = \frac{(37+13)(37^2+13\times(-37+13))}{(37+24)(37^2+24\times(-37+24))} = \frac{(37+13)(37^2-13\times 24)}{(37+24)(37^2-24\times 13)} = \frac{37+13}{37+24}$$

C'est la formule voulue.

Exercice 11 On applique exactement la méthode présentée dans l'encadré et on obtient la décomposition en éléments simples :

$$\frac{2x+3}{x^2+5x+6} = \frac{-1}{x+2} + \frac{3}{x+3}$$

On peut chercher une primitive de f sur un intervalle sur lequel les dénominateurs ne s'annulent pas, c'est-à-dire sur $]-\infty,-3[$, $]-3,-2[$ ou $]-2,+\infty[$. Sur l'un de ces intervalles, une primitive de f est :

$$F : x \mapsto -\ln(|x+2|) + 3\ln(|x+3|)$$

Remarque. *Nous verrons cette année qu'une primitive sur un intervalle I de $\dfrac{u'}{u}$, où u est une fonction qui ne s'annule pas sur I, est* $\ln(|u|)$.

Exercice 12 On commence par chercher les racines du dénominateur en factorisant par x :

$$x^3 - 2x^2 - 3x = x(x^2-2x-3) = x(x+1)(x-3)$$

en effet les racines de x^2-2x-3 sont -1 et 3 d'où la factorisation.
En généralisant la méthode présentée dans l'encadré, on cherche trois réels a, b et c tels que :

$$\frac{1}{x^3-2x^2-3x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-3}$$

On réduit au même dénominateur :

$$\frac{1}{x^3-2x^2-3x} = \frac{a(x+1)(x-3)+bx(x-3)+cx(x+1)}{x(x+1)(x-3)} = \frac{(a+b+c)x^2+(-2a-3b+c)x-3a}{x(x+1)(x-3)}$$

En identifiant, on obtient le système :

$$\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ -2a-3b+c &= 0 \\ -3a &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= -\dfrac{1}{3} \\ \\ b &= \dfrac{1}{4} \\ \\ c &= \dfrac{1}{12} \end{cases}$$

Ceci en sautant les étapes de résolution du système qui ne pose pas de problème, en commençant par trouver a.
Ce qui nous donne la décomposition suivante :

$$\frac{1}{x^3-2x^2-3x} = -\frac{1}{3x} + \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{12(x-3)}$$

Remarque. *On constate que cette méthode a ses limites car plus le dénominateur a de racines plus le système à résoudre sera compliqué. On verra des techniques bien plus performantes pour décomposer en éléments simples.*

Exercice 13 On applique la méthode de l'encadré pour obtenir la décomposition suivante, pour tout $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

Pour $n \geq 2$, la somme proposée se réécrit :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

Dans la somme précédente, on voit que les termes se simplifient de proche en proche (on dit que la somme est télescopique), il reste :

$$S_n = 1 - \frac{1}{n} \leq 1$$

La somme est majorée par 1.

Exercice 14

1. $A = x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2 = 2x^2 + 2y^2$
2. $B = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 = 4xy$
3. $C = ((x+y)-z)^2 - ((x-y)-z)^2 = (x+y)^2 - 2(x+y)z + z^2 - (x-y)^2 + 2(x-y)z - z^2 = 4xy - 4yz$
4. $D = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} = 1 + \sqrt{2}$
5. $E = \sqrt{\left(2 + \sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(2 - \sqrt{2+\sqrt{2}}\right)} = \sqrt{4 - (2+\sqrt{2})} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$
6. $F = (7-2\sqrt{6}) + 2\sqrt{\left(7-2\sqrt{6}\right)\left(7+2\sqrt{6}\right)} + (7+2\sqrt{6}) = 14 + 2\sqrt{49-24} = 24$
7. $G = (3-2\sqrt{2}) - 2\sqrt{\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)} + (3+2\sqrt{2}) = 6 - 2\sqrt{9-8} = 4$
8. $H = ((x^3+3x)+(2x^2+1))((x^3+3x)-(2x^2+1)) = (x^3+3x)^2 - (2x^2+1)^2 = x^6 + 6x^4 + 9x^2 - 4x^4 - 4x^2 - 1 = x^6 + 2x^4 + 5x^2 - 1$

Exercice 15 En développant, l'inégalité est équivalente à :

$$(x^2-2y^2)^2 \leq x^4 + 4y^4 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4 \leq x^4 + 4y^4$$

C'est-à-dire $-4x^2y^2 \leq 0$ ce qui est clairement vérifié puisque x et y sont des réels.

Il y a égalité si et seulement si $-4x^2y^2 = 0$ ce qui équivaut à $x = 0$ ou $y = 0$.

Exercice 16

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :
$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2$$
2. En utilisant l'écriture précédente, on a :
$$f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \geq 2$$
Ainsi f est minorée par 2, ce minorant est atteint pour $x = 1$ car $f(1) = 2$. On en déduit que le minimum de f sur $\mathbb{R}_+^*$ vaut 2.

Exercice 17

1. On a :
$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
De même, on trouve $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
2. On utilise la formule trouvée à la question précédente pour obtenir :
$$C = 3^3 - 3 \times 3^2 \times 2\sqrt{3} + 3 \times 3 \times (2\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^3 = 27 - 54\sqrt{3} + 3 \times 3 \times 12 - 24\sqrt{3} = 135 - 78\sqrt{3}$$

Exercice 18

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2+1+x)(x^2+1-x) = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$x^8 + 1 = (x^4+1)^2 - 2x^4 = (x^4+1+\sqrt{2}x^2)(x^4+1-\sqrt{2}x^2)$$
Il est même possible de pousser plus loin la factorisation, en reprenant l'écriture précédente, on a :
$$\begin{aligned} x^8+1 &= \Big((x^2+1)^2 - (2-\sqrt{2})x^2\Big)\Big((x^2+1)^2 - (2+\sqrt{2})x^2\Big) \\ x^8+1 &= \Big(x^2 + \sqrt{2-\sqrt{2}}x + 1\Big)\Big(x^2 - \sqrt{2-\sqrt{2}}x + 1\Big)\Big(x^2 + \sqrt{2+\sqrt{2}}x + 1\Big)\Big(x^2 - \sqrt{2+\sqrt{2}}x + 1\Big) \end{aligned}$$

Exercice 19 Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_+$, on a :
$$0 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y = x + y - 2\sqrt{xy}$$
On en déduit que $2\sqrt{xy} \leq x + y$, c'est-à-dire : $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x+y)$. C'est bien l'inégalité voulue.

Remarque. *Cette courte preuve est très classique, elle est à connaître. Cette inégalité se généralise, si a_1, a_2,…,a_n sont des réels positifs, alors :*
$$(a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

Exercice 20 On complète les factorisations de proche en proche pour x et y deux réels :

1. $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$
2. $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$
3. $x^4 - y^4 = (x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)$
4. On commence par simplifier la fraction proposée avec l'égalité du 1., pour $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 2$:

$$\frac{x^3-8}{x-2} = \frac{x^3-2^3}{x-2} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = x^2+2x+4$$

On a donc $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4) = 12$.

Exercice 21 Par hypothèse, il existe a, b, c et d des entiers naturels tels que :

$$m = a^2+b^2 \qquad \text{et} \qquad n = c^2+d^2$$

On vérifie en développant que :

$$mn = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$$

Exercice 22

1. $A = \frac{3\sqrt{2}+1}{1-\sqrt{2}} = \frac{(3\sqrt{2}+1)(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = \frac{4\sqrt{2}+7}{-1} = -4\sqrt{2}-7$
2. $B = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$
3. $C = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = 3-2\sqrt{2}$

Exercice 23

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 0$, on a :

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$

Sous cette forme-là, la limite n'est plus indéterminée et on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$$

2. On a :

$$\sqrt{x^2-1}-(x-1) = \frac{(\sqrt{x^2-1}-(x-1))(\sqrt{x^2-1}+(x-1))}{\sqrt{x^2-1}+(x-1)} = \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-1}+(x-1)}$$

Ce calcul étant valable pour $x > 1$ afin que le dénominateur ne s'annule pas. Avec cette nouvelle forme la limite est toujours indéterminée quand x tend vers $+\infty$, il convient de mettre x en facteur au numérateur et au dénominateur. Toujours pour $x > 1$, on a :

$$\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-1}+(x-1)} = \frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)} = \frac{\left(2-\frac{2}{x}\right)}{\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)}$$

Cette fois-ci la limite n'est plus indéterminée et on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}-(x-1) = 1$$

Exercice 24

1. Que vaut $5!$?

☐ 25 ☐ 24 ☐ 120 ☐ 240

Réponse : c)

On a : $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut $\dfrac{(n+2)!}{n!}$?

a) 2 b) $2n+3$ c) $n+2$ d) $(n+2)(n+1)$

Réponse : d)

On a :

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{1 \times 2 \times ... \times n \times (n+1) \times (n+2)}{1 \times 2 \times ... \times n} = (n+1)(n+2)$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, que vaut $2 \times 4 \times 6 \times ... \times 2n$?

a) $\dfrac{(2n)!}{n!}$ b) $2(n!)$ c) $2^n(n!)$ d) $(2n)!$

Réponse : c)

Dans chacun des n facteurs du produit proposé, on peut mettre 2 en facteur :

$$2 \times 4 \times 6 \times ... \times 2n = (2 \times 1) \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times (2 \times 4) ... \times (2 \times n) = 2^n \times (1 \times 2 \times 3 \times ... \times n) = 2^n(n!)$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, que vaut $1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1)$?

a) $\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)}$ b) $\dfrac{n!}{2^n(2n)!}$ c) $\dfrac{(2n)!}{n!}$ d) $(2n-1)!$

Réponse : a)

On se ramène au calcul de la question précédente en remarquant que :

$$1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1) = \frac{1 \times 2 \times 3 \times ... \times 2n}{2 \times 4 \times 6 \times ... \times 2n} = \frac{(2n)!}{2^n(n!)}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, à quoi est égal $\dfrac{1}{(n+1)(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{nn!}$?

a) $\dfrac{1}{n(n+1)(n+1)!}$ b) $\dfrac{-1}{n(n+1)(n+1)!}$ c) $\dfrac{-n}{n(n+1)(n+1)!}$ d) $\dfrac{-1}{(n+1)(n+1)!}$

Réponse : b)

On réduit au même dénominateur en utilisant le fait que $(n+1)! = (n+1) \times n!$:

$$\frac{1}{(n+1)(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{nn!} = \frac{n}{n(n+1)(n+1)!} + \frac{n(n+1)}{n(n+1)(n+1)!} - \frac{(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!}$$

On simplifie pour trouver :

$$\frac{1}{(n+1)(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{nn!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$, à quoi est égal $\binom{n}{2}$?

   ☐ $\frac{n(n+1)}{2}$ ☐ $\frac{n}{2(n-2)}$ ☐ $\frac{n(n-1)}{2}$ ☐ $\frac{n-1}{2}$

   Réponse : c)

   On applique la définition donnée dans l'encadré :

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Exercice 25

1. Détaillons un peu l'expression proposée, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \frac{3}{n} \times \cdots \times \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

   en effet le premier facteur du produit est égal à $\frac{1}{n}$ et les suivants sont tous inférieurs ou égaux à 1. Finalement, on a l'encadrement :

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$$

   D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

2. De même en détaillant le quotient, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{n!}{2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{2} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \frac{n}{2} \geq \frac{1}{2} \times \frac{n}{2}$$

   en effet le premier facteur vaut $\frac{1}{2}$, le dernier facteur vaut $\frac{n}{2}$ et tous les facteurs entre les deux sont supérieurs ou égaux à 1. Il reste à passer à la limite quand n tend vers $+\infty$ pour obtenir :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{2^n} = +\infty$$

Exercice 26 De façon assez surprenante cette limite vaut π, nous reverrons et démontrerons ceci en cours d'année.

Exercice 27 Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$. Dans le cas où le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est positif, les racines du trinôme $ax^2 + bx + c$ sont :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Avec éventuellement $x_1 = x_2$ dans le cas où $\Delta = 0$.

Puisque l'on dispose de ces expressions, il suffit de vérifier que x_1 et x_2 sont des racines du trinôme :

$$\begin{aligned}
ax_1^2 + bx_1 + c &= a\Big(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\Big)^2 + b \times \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + c \\
&= \frac{a}{4a^2}(b^2 - 2b\sqrt{\Delta} + \Delta) + \frac{1}{2a}(-b^2 + b\sqrt{\Delta}) + c \\
&= \frac{1}{4a}(\Delta - b^2 + 4ac) \\
&= 0
\end{aligned}$$

De même, on vérifie que x_2 est racine de $ax^2 + bx + c$.

Nous avons simplement démontré que x_1 et x_2 sont des racines du trinôme, il reste à démontrer que ce sont bien les seules racines.

Pour cela, on met le trinôme du second degré sous forme canonique :

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\Big[\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\Big] \\ &= a\Big[\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\Big] \quad \text{en notant } \Delta = b^2-4ac \\ &= a\Big[\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2 - \Big(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\Big)^2\Big] \quad \text{ici on reconnait l'identité remarquable } A^2-B^2=(A+B)(A-B) \\ &= a\Big(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\Big)\Big(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\Big) \end{aligned}$$

Un produit est nul si et seulement si l'un des deux facteurs est nul, c'est-à-dire :

$$x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0 \quad \text{ou} \quad x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0$$

Ce qui nous donne bien les deux valeurs de x possibles :

$$x_2 = -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_1 = -\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exercice 28 La limite proposée est une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. On trouve les racines du numérateur et du dénominateur afin de simplifier la fraction. En appliquant les formules connues, on trouve que l'unique racine de x^2-4x+4 est 2 et les racines de x^2-5x+6 sont 2 et 3. Ainsi , on a :

$$x^2-4x+4=(x-2)^2 \qquad \text{et} \qquad x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

On en déduit que :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x-3}=0$$

Exercice 29

1. **Réponse :** $2+\sqrt{2}$ et $2-\sqrt{2}$.

   On développe le membre de gauche pour obtenir l'équation :

   $$x^2-4x+2=0$$

   Le discriminant vaut 8 ce qui nous donne deux solutions :

   $$x_1=\frac{4+2\sqrt{2}}{2}=2+\sqrt{2} \text{ et } x_2=\frac{4-2\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}$$

2. **Réponse :** 0, 2 et 3.

   On peut factoriser par x pour obtenir :

   $$x(x^2-5x+6)=0$$

   Ce qui nous donne $x=0$ ou $x^2-5x+6=0$, cette dernière équation de degré 2 a pour solutions 2 et 3.

3. **Réponse :** 3

   On multiplie l'égalité par $(x-2)(x-5)$ et on simplifie pour obtenir l'équation $27x = 81$ (les x^2 se simplifient). L'unique solution est $x = 3$.

4. **Réponse :** $\sqrt{1+\sqrt{7}}$ et $-\sqrt{1+\sqrt{7}}$

   On pose $X = x^2$ pour se ramener à une équation que l'on sait résoudre : $X^2 - 2X - 6 = 0$. Les solutions de cette équations sont :
$$X_1 = 1+\sqrt{7} \qquad \text{et} \qquad X_2 = 1-\sqrt{7}$$
   Il reste à résoudre $x^2 = 1+\sqrt{7}$ et $x^2 = 1-\sqrt{7}$. La seconde équation n'a pas de solution réelle car $1-\sqrt{7} < 0$, la première nous donne les deux solutions annoncées.

5. **Réponse :** $\dfrac{7+\sqrt{33}}{2}$ et $\dfrac{7-\sqrt{33}}{2}$

   On multiplie l'égalité par $(x-1)^2$ et on simplifie pour obtenir une équation de degré 2 : $x^2+7x+4 = 0$. On en déduit les solutions.

6. **Réponse :** $\ln\left(\dfrac{-5+\sqrt{29}}{2}\right)$

   On multiplie l'équation proposée par e^x ce qui donne $1-5e^x = (e^x)^2$. On pose ensuite $X = e^x$ ce qui donne : $1-5X = X^2$. On résout cette dernière équation sans problème, les solutions sont :
$$X_1 = \frac{-5+\sqrt{29}}{2} \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{-5-\sqrt{29}}{2}$$
   La solution X_2 est négative, elle ne pourra pas s'écrire sous la forme e^x. Par contre $X_1 > 0$ ainsi $e^x = X_1$ équivaut à $x = \ln(X_1)$.

Exercice 30 On fait une étude de fonction pour connaître les variations de f. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$f' : x \mapsto 2ax + b$$
On a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{2a}$, étant donné que $a < 0$ la fonction f est donc croissante sur $\left]-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$ et décroissante sur $\left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right[$. La maximum de f sur $\mathbb{R}$ est atteint au point d'abscisse $-\dfrac{b}{2a}$. Après un rapide calcul, il vaut :
$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac-b^2}{4a}$$
Par contre f ne possède pas de minimum car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ car $a < 0$.

Exercice 31

1. Les racines du trinôme sont 2 et 3, d'après l'encadré de cours ce trinôme est négatif ou nul entre les racines, c'est-à-dire sur l'intervalle $[2, 3]$.
2. L'inéquation s'écrit $x^2 - x \geq 0$. Les racines de $x^2 - x$ sont 0 et 1, on en déduit que l'ensemble solution est $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$.
3. Le discriminant de ce trinôme est strictement négatif, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 2x + 3 > 0$.
4. Cette double inéquation est équivalente à $x - 2 \in [-6, -5] \cup [5, 6]$, c'est-à-dire $x \in [-4, -3] \cup [7, 8]$.
5. Déjà l'inéquation est définie pour $x \neq -1$ et $x \neq 3$. Elle est équivalente à :
$$0 \leq \frac{-x+2}{x-3} - \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(-x+2)(x+1) - x(x-3)}{(x-3)(x+1)} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{-2x^2+4x+2}{(x-3)(x-1)}$$
   On fait un tableau de signe pour le numérateur (les racines sont $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$) et le dénominateur et l'on trouve que l'intervalle solution est $]-1, 1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2}, 3[$.

Remarque. *Pour résoudre cette dernière équation, ce n'était pas une bonne idée de faire un produit en croix car le sens de l'inégalité change selon le signe des dénominateurs. D'autre part, avant de résoudre une équation ou une inéquation, on pensera à donner l'ensemble de définition de l'équation ou l'inéquation.*

6. Déjà l'inéquation est définie pour $x \geq -1$ afin que l'expression sous la racine soit positive ou nulle. Elle se réécrit $\sqrt{x+1} < 11 - x$, ceci impose que $x < 11$ afin que $0 < 11 - x$ puisqu'une racine carrée est positive. Prenons donc $-1 \leq x < 11$, on a :
$$\sqrt{x+1} < 11 - x \Leftrightarrow x + 1 < (11-x)^2 \Leftrightarrow 0 < x^2 - 23x + 120$$
Les racines du trinôme sont 8 et 15 et ce trinôme est donc strictement positif sur $]-\infty, 8[\cup]15, +\infty[$ et sachant que $-1 \leq x < 11$, on obtient comme intervalle solution $[-1, 8[$.

Exercice 32 On remarque que 1 est une solution évidente, on peut factoriser par $x - 1$:
$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$$
Le trinôme $x^2 - 5x + 6$ a pour racines 2 et 3. Finalement l'équation proposée a pour solutions 1, 2 et 3.

Remarque. *Pour trouver des solutions évidentes, on teste* 0, 1, -1, *voire* 2 *et* -2. *On peut aussi essayer* i *et* $-i$ *si l'on cherche des solutions complexes.*

Exercice 33 On calcule :
$$f(2) = 24 - 4a + 4 - 4 = 24 - 4a$$
ainsi $f(2) = 0$ si et seulement si $a = 6$.
Pour cette valeur de a, on peut mettre $x - 2$ en facteur :
$$f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 2x - 4 = (x-2)(3x^2 + 2)$$
Le trinôme $3x^2 + 2$ n'a pas de racine réelle. L'équation $f(x) = 0$ a pour unique solution réelle $x = 2$.

Remarque. *Au niveau du vocabulaire, on parle de solution d'une équation et de racine d'un polynôme. Par exemple* 1 *et* 2 *sont les racines de* $x^2 - 3x + 2$ *et ce sont les solutions de* $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Exercice 34 En testant certaines valeurs de x, on ne trouve pas de solution évidente. On va étudier les variations de $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 6x + 2$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : x \mapsto 3x^2 - 6x + 6$. Le discriminant de f' est strictement négatif ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) > 0$. On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- f continue sur $\mathbb{R}$.
- f strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ceci implique que f s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}$.

Remarque. *Ce résultat graphiquement évident sera justifié en cours d'année à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires.*

Exercice 35

1. Vrai.
2. Vrai.
3. C'est faux, en prenant $x = 0$ par exemple.
4. C'est faux, en prenant $x = y = 0$ par exemple.
5. C'est faux, cette formule ne s'applique pas pour x ou y négatif.
6. Vrai.
7. C'est faux pour $x = 1$ par exemple.
8. C'est faux pour $x = 1$ par exemple.
9. C'est vrai.
10. C'est faux. On a :

$$e^{\ln(5)} + e^{-\ln(3)} = e^{\ln(5)} + \frac{1}{e^{\ln(3)}} = 5 + \frac{1}{3} \neq 2$$

Remarque. *Les fonctions exp et* ln *sont des bijections réciproques, c'est-à-dire que :*

$$\textit{pour tout } x \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x \qquad \textit{et} \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*,\ e^{\ln(x)} = x$$

11. C'est vrai. On a :

$$e^{\frac{1}{2}\ln(4)} + e^{-\ln(\frac{1}{2})} = e^{\ln(2)} + \frac{1}{e^{\ln(\frac{1}{2})}} = 2 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 4$$

12. C'est vrai, pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\ln(e^x + 1) = \ln(e^x(1 + e^{-x})) = \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-x}) = x + \ln(e^{-x} + 1)$$

13. C'est faux, pour $x = -2$ par exemple puisque ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
14. C'est vrai.
15. C'est faux. On a :

$$\ln(x + 2) = 1 \Leftrightarrow x + 2 = e \Leftrightarrow x = e - 2$$

Exercice 36

1. Soit $x > 0$, à quoi est égal $\ln(x + 1) - \ln(x)$?

a) $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ b) $\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ c) 0 d) $-\ln(x)$

Réponse : a)

Pour $x > 0$, on utilise les propriétés usuelles de la fonction ln :

$$\ln(x + 1) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x + 1}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

---

2. À quoi est égal $\ln(3^4) + \ln(3^2) - \ln(3^6)$?

a) 1 b) 0 c) e d) cela ne se simplifie pas

Réponse : b)

On a :

$$\ln(3^4) + \ln(3^2) - \ln(3^6) = \ln\left(\frac{3^4 \times 3^2}{3^6}\right) = \ln(1) = 0$$

---

3. Soit $x > 0$, à quoi est égal $\sqrt{\ln(x)}$?

a) $\frac{1}{2}\ln(x)$ b) $\ln\left(\frac{1}{2}x\right)$ c) cela ne se simplifie pas d) $\ln(\sqrt{x})$

Réponse : c)

Cela ne se simplifie pas. Par contre, on a la formule : $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$.

---

4. Soit $x > 0$, à quoi est égal $\ln(x^{\frac{4}{3}})$?

a) $\frac{1}{3}\ln(x)$ b) $\frac{4}{3}\ln(x)$ c) $\ln\left(\frac{4}{3}\right) + \ln(x)$ d) $x\ln\left(\frac{4}{3}\right)$

Réponse : b)

D'après les propriétés usuelles de la fonction ln, on a :

$$\ln(x^{\frac{4}{3}}) = \frac{4}{3}\ln(x)$$

---

5. Soient x et y deux réels, à quoi est égal e^{xy} ?

a) $e^x + e^y$ b) $e^x e^y$ c) cela ne se simplifie pas d) e^{x+y}

Réponse : c)

Cela ne se simplifie pas, la formule qui est correcte est :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ e^{x+y} = e^x e^y$$

---

6. Soit $x \in \mathbb{R}$, à quoi est égal $\frac{1}{e^x}$?

a) $e^{\frac{1}{x}}$ b) e^{-x} c) cela ne se simplifie pas d) $-e^x$

Réponse : b)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$.

---

7. Le réel $(\ln(4)) \times \ln(\sqrt{2})$ est égal à :

☐ $\ln(4 + \sqrt{2})$ ☐ $\ln(4\sqrt{2})$ ☐ $\ln(2)$ ☐ $(\ln(2))^2$

Réponse : d)

On a : $\ln(4) \times \ln(\sqrt{2}) = 2\ln(2) \times \frac{1}{2}\ln(2) = \ln(2)^2$.

---

8. Soit $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(e^n) - 2e + \ln(1)$ est égal à :

☐ $e^n - 2e + e$ ☐ $e^n - 2e$ ☐ $n - 2e$ ☐ $n - 2e + 1$

Réponse : c)

En effet $\ln(e^n) = n$ et $\ln(1) = 0$.

---

9. $\ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(2 - \sqrt{3})$ est égal à :

☐ 1 ☐ 0 ☐ 4 ☐ $\frac{1}{2 + \sqrt{3}} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$

Réponse : b)

On a :

$$\ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(2 - \sqrt{3} = \ln((2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})) = \ln(4 - 3) = \ln(1) = 0$$

Exercice 37

1. $A = \ln(96) = \ln(2^5 \times 3) = 5\ln(2) + \ln(3)$
2. $B = \ln(2^5 \times 3^5) = 5\ln(2) + 5\ln(3)$
3. $C = \dfrac{1}{\ln(2^2 \times 3)} = \dfrac{1}{2\ln(2) + \ln(3)}$
4. $D = -\ln(12) = -2\ln(2) - \ln(3)$
5. $E = \ln((2 \times 3^2) \times (2^2 \times 3^2)) = 3\ln(2) + 4\ln(3)$
6. $F = \ln(48) = \ln(2^4 \times 3) = 4\ln(2) + \ln(3)$

Exercice 38

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ d'après les résultats usuels de croissances comparées.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ d'après les résultats usuels de croissances comparées.
3. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = 0$, ce n'est pas une forme indéterminée.
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, c'est une limite usuelle qui se calcule à l'aide d'un nombre dérivé, voir le paragraphe 6.3 sur les limites.
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$, ce n'est pas une forme indéterminée.
6. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ d'après les résultats usuels de croissances comparées.
7. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ d'après les résultats usuels de croissances comparées.
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, c'est une limite usuelle qui se calcule à l'aide d'un nombre dérivé.
9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} xe^x = 0$, ce n'est pas une forme indéterminée.
10. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$, ce n'est pas une forme indéterminée.
11. $\displaystyle\lim_{x\to 3} x\ln(x) = 3\ln(3)$, par continuité de $x \mapsto x\ln(x)$.
12. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} = 1$ en effet :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$$
13. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$, ce n'est pas une forme indéterminée.
14. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty$, ce n'est pas une forme indéterminée.
15. Cette limite n'a pas de sens car ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
16. On a :
$$\frac{\ln(1+2x)}{3x} = \frac{\ln(1+2x)}{2x} \times \frac{2}{3}$$
Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{3x} = \frac{2}{3}$.

Exercice 39

1. Donner tous les réels x tels que : $e^{2x+1} = 3$.

   Réponse : $\dfrac{1}{2}(\ln(3) - 1)$.

   On applique la fonction ln, l'équation est équivalente à $2x + 1 = \ln(3)$ ce qui donne $x = \dfrac{1}{2}(\ln(3) - 1)$.

---

2. Donner tous les réels x tels que : $e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$.

   Réponse : 0.

   On change d'inconnue en posant $X = e^x$, étant donné que $e^{2x} = (e^x)^2$, on obtient :

   $$X^2 + 5X - 6 = 0$$

   Cette équation se résout sans problème, elle a pour solution :

   $$X_1 = 1 \text{ ou } X_2 = -6$$

   On en déduit que l'équation de départ a une solution $x_1 = \ln(1) = 0$ puisque $-6 = e^x$ n'a pas de solution.

---

3. Donner tous les réels x tels que : $\ln(\ln(x)) < -2$.

   Réponse : $]1, e^{e^{-2}}[$

   Cette inéquation est définie pour $\ln(x) > 0$, c'est-à-dire $x > 1$. On applique la fonction exponentielle, l'inéquation est équivalente à $\ln(x) < e^{-2}$, c'est-à-dire $x < e^{e^{-2}}$.

---

4. Trouver tous les réels x tels que : $e^{x^2+6} \leq e^{5x}$.

   Réponse : $[2, 3]$

   On applique la fonction exponentielle, l'inéquation est équivalente à $x^2 + 6 \leq 5x$, c'est-à-dire $x^2 - 5x + 6 \leq 0$. Le trinôme $x^2 - 5x + 6$ est négatif entre ses racines qui sont 2 et 3.

---

5. Trouver tous les réels x tels que : $\ln(x - 2) + \ln(x + 3) = \ln(2)$.

   Réponse : $\dfrac{-1 + \sqrt{33}}{2}$

   Cette équation est définie pour $x > 2$ étant donné que ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x > 2$, on a :

   $$\ln(x - 2) + \ln(x + 3) = \ln(2) \Leftrightarrow \ln((x - 2)(x + 3)) = \ln(2) \Leftrightarrow (x - 2)(x + 3) = 2$$

   On poursuit le calcul :

   $$(x - 2)(x + 3) = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 8 = 0$$

   Cette équation a pour solution :

   $$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{33}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{33}}{2}$$

   Seule la première solution convient car elle est supérieure à 2.

---

6. Donner tous les réels x tels que : $\ln(x)^2 + \dfrac{1}{\ln(x)^2} = 2$.

   Réponse : e et e^{-1}

   On factorise à l'aide d'une identité remarquable :

   $$\ln(x)^2 + \frac{1}{\ln(x)^2} = 2 \Leftrightarrow \Big(\ln(x) - \frac{1}{\ln(x)}\Big)^2 = 0$$

   C'est-à-dire $\ln(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$ ou encore $\ln(x)^2 = 1$. On en déduit que $\ln(x) = 1$ ou $\ln(x) = -1$ d'où le résultat.

---

7. Donner tous les réels x tels que : $2\ln(x) + \ln(x+1) \geq \ln(x^3 - x^2 + x)$.

   Réponse : $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

   L'inéquation est définie pour $x > 0$, $x + 1 > 0$ et $x^3 - x^2 + x > 0$. Cette dernière inéquation se résout en factorisant :

$$x^3 - x^2 + x = x(x^2 - x + 1)$$

   Le trinôme $x^2 - x + 1$ est strictement positif, son discriminant étant strictement négatif.
   Finalement l'inéquation est définie pour $x > 0$. Elle est équivalente à :

$$\ln(x^2(x+1)) \geq \ln(x^3 - x^2 + x)$$

   La fonction ln étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :

$$x^2(x+1) \geq x^3 - x^2 + x$$

   En simplifiant, il vient $x(2x-1) \geq 0$. Cette inéquation se résout sans problème, avec un tableau de signe par exemple et on trouve l'intervalle solution $]-\infty, 0] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Sachant que $x > 0$, on en déduit que l'inéquation de départ a pour ensemble solution : $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

---

8. Trouver tous les réels x tels que : $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \geq 1$.

   Réponse : $\mathbb{R}$.

   L'inéquation se réécrit :

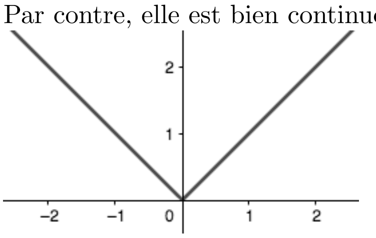
$$\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})^2 \geq 0$$

   cette inégalité est vérifiée pour tout x réel.

Exercice 40

1. La fonction f est définie pour les réels x tels que $\sqrt{x^2+1}-x>0$ car la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$$
C'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1}-x>0$.
2. On va utiliser la méthode de la quantité conjuguée. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$ et :
$$f(-x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x) = \ln\left(\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\right) = -\ln(\sqrt{x^2+1}-x) = -f(x)$$
La fonction f est impaire.

Exercice 41 Vous avez vu que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0, nous le justifierons cette année. Par contre, elle est bien continue en 0.



Exercice 42 On a :
$$A = |2-\sqrt{3}| - |3-2\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}-(2\sqrt{3}-3) = 5-3\sqrt{3}$$
en effet $|2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}$ car $2>\sqrt{3}$ et $|3-2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}-3$ car $2\sqrt{3}>3$.

Remarque. *L'erreur à ne pas commettre est de simplifier directement la racine carrée et le carré ainsi :*
$$A = 2-\sqrt{3}-(3-2\sqrt{3})$$

Exercice 43

1. $x=36$ ou $x=-36$.
2. x appartient à l'intervalle $[-4,4]$.
3. x appartient à l'ensemble $]-\infty,-7[\cup]7,+\infty[$.
4. x appartient à l'ensemble $]-5,-2]\cup[2,5[$.
5. On a :
$$|x-2| \leq 9 \Leftrightarrow -9 \leq x-2 \leq 9 \Leftrightarrow -7 \leq x \leq 11 \Leftrightarrow x \in [-7,11]$$
6. On a :
$$|x+1| \geq 4 \Leftrightarrow x+1 \geq 4 \text{ ou } x+1 \leq -4 \Leftrightarrow x \geq 3 \text{ ou } x \leq -5 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-5] \cup [3,+\infty[$$
7. On a :
$$|x+1| = |x-2| \Leftrightarrow x+1 = x-2 \text{ ou } x+1 = -x+2 \Leftrightarrow 1=-2 \text{ ou } x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$
8. Cette équation est équivalente à $x^2-5x=4$ ou $x^2-5x=-4$, c'est-à-dire $x^2-5x-4=0$ ou $x^2-5x+4=0$.
La première équation a pour solution :
$$x_1 = \frac{5+\sqrt{41}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{5-\sqrt{41}}{2}$$
La seconde équation a pour solution :
$$x_3 = 1 \qquad \text{et } x_4 = 4$$
Les 4 solutions de l'équation sont x_1, x_2, x_3 et x_4.

Exercice 44 On a :

$$|x-a| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x-a \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon + a \leq x \leq \varepsilon + a$$

Les réponses 1 et 3 sont correctes.

Exercice 45

1. Par définition de la valeur absolue, cette équation est équivalente à $x \in \mathbb{R}_-$.
2. Si x vérifie cette équation, on a nécessairement $x+4 \geq 0$ donc $x \geq -4$. Pour $x \geq -4$, en élevant au carré, l'équation est équivalente à $|x+3| = x^2+8x+16$. Ce qui nous donne les deux équations :

$$x+3 = x^2+8x+16 \quad \text{ou} \quad x+3 = -x^2-8x-16 \Leftrightarrow x^2+7x+13 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2+9x+19 = 0$$

La première équation n'a pas de solution réelle car elle a un discriminant strictement négatif. La seconde équation a pour discriminant 5, les solutions de l'équation sont $\dfrac{-9 \pm \sqrt{5}}{2}$. Cependant la solution $\dfrac{-9-\sqrt{5}}{2}$ est à exclure car elle est inférieure à -4. L'unique solution est $\dfrac{-9+\sqrt{5}}{2}$.

3. On élève au carré, l'inéquation est équivalente à $-1 \leq \left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 \leq 1$, c'est-à-dire : $-1 \leq \dfrac{1-2x^2+x^4}{1+2x^2+x^4} \leq 1$.
Cela donne :

$$-1 \leq \frac{1+2x^2+x^4-4x^2}{1+2x^2+x^4} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 1 + \frac{-4x^2}{1+2x^2+x^4} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \frac{-4x^2}{1+2x^2+x^4} \leq 0$$

L'inéquation de droite est toujours vérifiée. Sachant que le dénominateur est toujours positif, l'inéquation de droite est équivalente à :

$$-2x^4-4x^2-2 \leq -4x^2$$

Ce qui donne $-2 \leq 2x^4$, ce qui est vérifié pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque. *On peut aller plus vite en écrivant si l'on connait l'inégalité triangulaire : pour tous a et b deux réels $|a+b| \leq |a|+|b|$. On a alors :*

$$\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| = \frac{|1-x^2|}{|1+x^2|} \leq \frac{1+|-x^2|}{1+|x^2|} = \frac{1+x^2}{1+x^2} = 1$$

4. Il va falloir distinguer plusieurs cas selon le signe des expressions présentes dans les valeurs absolues.

• Si $x \geq \dfrac{1}{2}$, on a : $x+1 \geq 0$ et $2x-1 \geq 0$. Dans ce cas l'inéquation devient :

$$x+1-(2x-1) \leq 1 \Leftrightarrow -x+2 \leq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$$

Les réels de l'intervalle $[1, +\infty[$ sont solutions.

• Si $x \in \left[-1, \dfrac{1}{2}\right]$, on a : $x+1 \geq 0$ et $2x-1 \leq 0$. Dans ce cas, l'inéquation devient :

$$x+1+(2x-1) \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$$

Les réels de l'intervalle $\left[-1, \dfrac{1}{3}\right]$ sont solutions.

• Enfin, si $x \leq -1$, les deux expressions dans les valeurs absolues sont négatives. Dans ce cas, l'inéquation devient :

$$-(x+1)+(2x-1) \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 3$$

Les réels de l'intervalle $]-\infty, -1]$ sont solutions.

$$\mathcal{S} = \left]-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup [1, +\infty[$$

Exercice 46

1. L'inéquation est équivalente à $3\sqrt{3} - 3x = 2x - 2\sqrt{2}$, c'est-à-dire $x = \dfrac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{5}$.
2. Tout d'abord, l'équation est définie lorsque les quantités sous les racines carrées sont positives, c'est-à-dire pour $x \in \left[-5, \dfrac{4}{3} \right]$. Les deux membres étant positifs, on élève au carré :

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Leftrightarrow \quad (\sqrt{6-x} + \sqrt{3-x})^2 = (\sqrt{x+5} + \sqrt{4-3x})^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 9 - 2x + 2\sqrt{6-x}\sqrt{3-x} = 9 - 2x + \sqrt{x+5}\sqrt{4-3x} \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{6-x}\sqrt{3-x} = \sqrt{x+5}\sqrt{4-3x} \qquad \text{on élève encore au carré} \\
&\Leftrightarrow \quad (6-x)(3-x) = (x+5)(4-3x) \\
&\Leftrightarrow \quad 2x^2 + x - 1 = 0 \qquad \text{après avoir développé} \\
&\Leftrightarrow \quad x = -1 \text{ ou } \ x = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

   Les deux solutions trouvées appartiennent bien à l'ensemble de définition de l'équation.
3. L'équation est équivalente à $x^3 = 1$, l'unique solution réelle de cette équation est $x = 1$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$, l'équation se réécrit : $2x^3 + (x+1)^3 = 0$ ou encore $(2^{\frac{1}{3}}x)^3 = (-(x+1))^3$. Si les cubes de deux nombres réels sont égaux, c'est que les deux nombres sont égaux. On en déduit que $2^{\frac{1}{3}}x = -x - 1$, d'où $x = -\dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{3}}}$.

Exercice 47 La valeur $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ne peut clairement pas être solution de l'équation de départ car x est nécessairement positif. Le problème vient de la première équivalence, de façon générale, pour a et b deux réels, il est faux d'écrire :

$$a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$$

Vous pouvez prendre $a = 3$ et $b = -3$ pour vous en convaincre. Si a et b sont positifs, l'équivalence ci-dessus est par contre valide. On peut corriger la rédaction ainsi :

$$\sqrt{3x^2 - 1} = x \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x^2 - 1 = x^2 \\ x \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x^2 = 1 \\ x \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 = \dfrac{1}{2} \\ x \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

L'unique solution de l'équation est donc $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 48

1. C'est faux, on peut prendre $a = 3$ et $b = 3$.
2. C'est vrai.
3. C'est vrai.
4. C'est vrai.
5. C'est vrai.
6. C'est faux, on peut prendre $a = b = 0$, $c = 1$ et $d = 3$.
7. C'est vrai.
8. C'est vrai.
9. C'est vrai, on multiplie par -1 l'inégalité $c \geq d$, ce qui donne $-c \leq -d$ et on somme les inégalités pour obtenir en effet $a - c \leq b - d$.
10. C'est faux, on peut prendre $a = 1$, $b = 1$ et $c = -1$.
11. C'est vrai.

12. C'est faux, on peut prendre $a = 1$, $b = 2$ et $c = 0$.
13. C'est faux, on peut prendre $a = b = c = -1$ et $d = 1$.
14. C'est vrai.
15. C'est faux, on peut prendre $a = c = -2$ et $b = d = -1$.
16. C'est faux, on peut prendre $a = -2$, $b = -1$, $c = 1$ et $d = 1$.
17. C'est faux, on peut prendre $a = c = -2$ et $b = d = 1$.
18. C'est vrai, la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
19. C'est faux, on peut prendre $a = -2$ et $b = 1$.
20. C'est vrai, la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
21. C'est faux, on peut prendre $a = -2$ et $b = -1$.
22. C'est vrai, la fonction carrée est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
23. C'est vrai, la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.
24. C'est faux, on peut prendre $a = 1$ et $b = 2$.
25. C'est faux, on peut prendre $a = 1$ et $b = 2$.
26. C'est faux, on peut prendre $a = -2$ et $b = -1$.
27. C'est faux, on peut prendre $a = b = c = 1$ et $d = -1$.
28. C'est faux, on peut prendre $a = b = c = 1$ et $d = 2$.
29. C'est vrai, on prend l'inverse dans la seconde inégalité pour obtenir $0 \leq \frac{1}{c} \leq \frac{1}{d}$ et il reste enfin à multiplier les inégalités (qui sont bien toutes les deux positives) pour conclure.

Exercice 49 • Pour $x + y$, on somme les inégalités :

$$-3 \leq x + y < 1$$

• On multiplie la seconde inégalité par -1 : $5 \geq -y > 3$, c'est-à-dire : $3 < -y \leq 5$. On somme les inégalités pour avoir :

$$5 < x - y \leq 9$$

• On a $2 \leq x \leq 4$ et $3 < -y \leq 5$, ces deux inégalités étant positives, nous pouvons les multiplier entre elles pour obtenir :

$$6 < -xy \leq 20 \Leftrightarrow -20 \leq xy < -6$$

• On part de l'inégalité sur y, les nombres mis en jeu étant de même signe, on peut prendre l'inverse : $-\frac{1}{3} < \frac{1}{y} \leq -\frac{1}{5}$. On multiplie par -1 : $\frac{1}{5} \leq -\frac{1}{y} < \frac{1}{3}$. On multiplie cette dernière inégalité avec celle portant sur x pour obtenir :

$$\frac{2}{5} \leq -\frac{x}{y} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < \frac{x}{y} \leq -\frac{2}{5}$$

Exercice 50 Il y a plusieurs cas à considérer :

• Si $x \leq 0$, il est clair que $x^2 \geq x$.
• Si $0 \leq x \leq 1$, on peut multiplier cette inégalité par x (qui est positif) pour obtenir $0 \leq x^2 \leq x$.
• Enfin si $x \geq 1$, en multipliant par x, il vient $x^2 \geq x$.

Exercice 51 L'inéquation est définie si $x \neq 0$.

• Si $x < 0$ l'inéquation est clairement vérifiée.
• Si $x > 0$, la fonction inverse étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$: $\frac{2}{x} < 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} > 1 \Leftrightarrow x > 2$.

L'ensemble des solutions est $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$.

Exercice 52 On dit qu'une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ est croissante si pour tous $a \in D$ et $b \in D$, on a :

$$a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

On dit qu'une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ est décroissante si pour tous $a \in D$ et $b \in D$, on a :

$$a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$$

On dit qu'une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ est strictement croissante si pour tous $a \in D$ et $b \in D$, on a :

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$$

On dit qu'une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ est strictement décroissante si pour tous $a \in D$ et $b \in D$, on a :

$$a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$$

1. C'est faux, on peut prendre comme contre-exemple la fonction constante égale à 1, définie sur $\mathbb{R}$ avec $a = 2$ et $b = 1$. Cette fonction est bien croissante d'après la définition mais elle ne vérifie pas la propriété de la question.
2. C'est vrai. Supposons par l'absurde que $f(a) \leq f(b)$ et $a > b$. Comme $a > b$ et f strictement croissante, on en déduit que $f(a) > f(b)$ ce qui est contradictoire avec notre hypothèse de départ. On en déduit que l'implication est vraie.

Exercice 53 C'est faux, on peut prendre par exemple les valeurs suivantes : $a = 234$, $b = 270$, $c = 81$, $d = 87$, $a' = 55$, $b' = 80$, $c' = 192$ et $d' = 263$. Il faut utiliser la calculatrice pour le vérifier.

Exercice 54

1. Cette inéquation est définie pour $x \neq 5$. Ce quotient est positif si et seulement si le numérateur et le dénominateur sont de même signe. C'est-à-dire si et seulement si $x > 5$ ou $x \leq -\dfrac{1}{2}$.

$$\mathcal{S} = \left] -\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup]5, +\infty[$$

2. C'est inégalité est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$, en effet :

$$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$$

3. Il est exclu d'élever directement les deux membres de cette inégalité au carré puisque $x - 1$ peut être négatif. Il faut distinguer plusieurs cas en remarquant avant tout que pour que l'inéquation ait un sens il faut que $x \geq -2$.
   ► Si $-2 \leq x < 1$ alors $x - 1 < 0$. Ainsi, il est clair que $x - 1 < \sqrt{x+2}$ puisque qu'une racine carrée est positive. Les réels de l'intervalle $[-2, 1[$ sont solutions.
   ► Si $x \geq 1$, les deux membres de l'inégalité sont positifs et dans ce cas :

$$x - 1 < \sqrt{x+2} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 < x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 < 0$$

   Les racines du trinôme $x^2 - 3x - 1$ sont $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$. Ce trinôme est strictement négatif entre ses racines, c'est-à-dire sur l'intervalle : $]x_2, x_1[$. Il faut tenir compte de la condition initiale : $x \geq 1$. Les réels de l'intervalle $\left[1, \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right[$ sont solutions.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \left[-2, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right[}$$

4. Cette inéquation est définie pour tout x réel puisque : $\forall x \in \mathbb{R},\ |x-3| \geq 0$. Déjà, si $x < 1$, l'inéquation n'a clairement pas de solution car $\sqrt{|x-3|} \geq 0$. Dans la suite du calcul, on prend $x \geq 1$, ainsi les deux membres de l'inégalité sont positifs et :

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{|x-3|} \leq x-1 & \Leftrightarrow & |x-3| \leq (x-1)^2 \\ & \Leftrightarrow & -(x-1)^2 \leq x-3 \leq (x-1)^2 \\ & \Leftrightarrow & -x^2+2x-1 \leq x-3 \leq x^2-2x+1 \\ & \Leftrightarrow & -x^2+2x-1 \leq x-3 \text{ et } x-3 \leq x^2-2x+1 \\ & \Leftrightarrow & x^2-x-2 \geq 0 \text{ et } x^2-3x+4 \geq 0 \end{array}$$

Le premier trinôme a pour racines -1 et 2 donc $x^2-x-2 \geq 0$ si et seulement si $x \in]-\infty,-1] \cup [2,+\infty[$. Le second trinôme est toujours strictement positif puisque son discriminant est strictement négatif. En tenant compte du fait que dans ce calcul $x \geq 1$, on obtient :

$$\boxed{\mathcal{S} = [2,+\infty[}$$

Exercice 55

On note L_1 et L_2 les lignes des systèmes proposés :

1.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-3y & = & 5 \\ -4x+7y & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 2x-3y & = & 5 & (L_1) \\ y & = & 13 & (2L_1+L_2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 22 \\ y & = & 13 \end{array}\right.$$

2.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-3y & = & 5 \\ -4x+6y & = & -10 \end{array}\right. \Leftrightarrow 2x-3y=5$$

car L_2 se déduit de L_1 par une multiplication par -2. Dans ce cas l'ensemble des solutions est la droite d'équation $2x-3y=5$. Il y a une infinité de solutions.

3. En effectuant la combinaison $2L_1+L_2$, on obtient $0=-2$ ce qui montre que le système est incompatible et que l'ensemble des solutions est l'ensemble vide.

Exercice 56 On a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+10y-3z & = & 5 \\ 2x-y+2z & = & 2 \\ -x+y+z & = & -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} -x+y+z & = & -3 & (L_3) \\ 11y-2z & = & 2 & (L_1+L_3) \\ y+4z & = & -4 & (L_2+2L_3) \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -x+y+z & = & -3 \\ y & = & 0 \\ z & = & -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2 \\ y & = & 0 \\ z & = & -1 \end{array}\right.$$

Exercice 57

1. On a :

$$\cos(a-b) = \cos(a+(-b)) = \cos(a)\cos(-b) - \sin(a)\sin(-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

2. On a :

$$\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) = \sin(a)\cos(-b) + \cos(a)\sin(-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

3. On somme les deux formules suivantes :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

et on divise par 2 pour obtenir :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

4. De même, en retranchant les formules donnant $\cos(a-b)$ et $\cos(a+b)$, on a :

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

5. On somme les deux formules suivantes :

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

et on divise par 2 pour obtenir :

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

6. On a :

$$\cos(a+b+c) = \cos(a+(b+c)) = \cos(a)\cos(b+c) - \sin(a)\sin(b+c)$$

et on développe à nouveau :

$$\cos(a+b+c) = \cos(a)(\cos(b)\cos(c) - \sin(b)\sin(c)) - \sin(a)(\sin(b)\cos(c) + \cos(b)\sin(c))$$

On obtient :

$$\cos(a+b+c) = \cos(a)\cos(b)\cos(c) - \cos(a)\sin(b)\sin(c) - \sin(a)\sin(b)\cos(c) - \sin(a)\cos(b)\sin(c)$$

7. D'après les formules d'addition, on a :

$$\begin{aligned}
\cos(a)+\cos(b) &= \cos\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right) + \cos\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right) \\
&= \\
&= \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) - \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) + \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) + \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
&= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)
\end{aligned}$$

8. On procède de même qu'à la question précédente en écrivant $a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ et $b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$ pour obtenir :

$$\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Exercice 58

1. D'après les formules de linéarisation, on a :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

On en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$ et sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$, on en déduit que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

2. Avec l'indication de l'énoncé, on a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}$$

Remarque. *Les deux expressions de* $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *trouvées donnent bien la même valeur, même si les expressions ne sont pas les mêmes.*

Exercice 59

1. On a $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$.
2. On a $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$.
3. On a $\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}-2\pi\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$.
4. On a $\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}-\pi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\pi\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
5. On a $\cos\left(\frac{27\pi}{3}\right)=\cos(9\pi)=\cos(\pi)=-1$.
6. On a $\sin\left(-\frac{31\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}-5\pi\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}+5\pi\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

Exercice 60

1. On utilise la définition pour trouver :

$$\tan(0)=0,\quad \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1\quad \text{et}\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$$

La fonction tangente n'est pas définie en $\frac{\pi}{2}$.

2. • La fonction tangente est définie en tout réel x tel que $\cos(x)\neq 0$. Or

$$\cos(x)=0\Leftrightarrow\cos(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\quad\text{ou}\quad x=-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

L'ensemble de définition est $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

• Soit $x\in D$, on a $x+\pi\in D$ et :

$$\tan(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{-\sin(x)}{-\cos(x)}=\tan(x)$$

La fonction tangente est π-périodique.

• Soit $x\in D$, on a $-x\in D$ et :

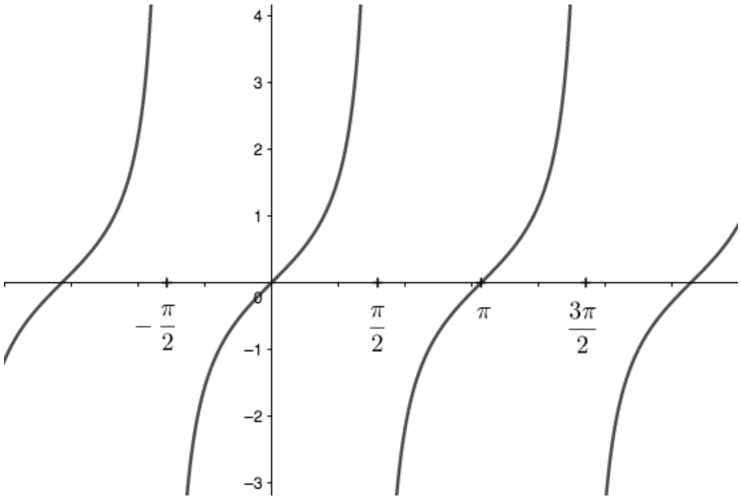
$$\tan(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}=-\tan(x)$$

3. La fonction tangente est dérivable sur D comme quotient de fonctions dérivables sur D et d'après les formules pour dériver un quotient, on a pour tout $x\in D$:

$$\tan'(x)=\frac{\cos(x)\cos(x)-\sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)}=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$$

La fonction tangente étant π-périodique, il suffit de faire l'étude sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et de compléter la courbe représentative par translation de vecteur $k\,\vec{i}$ où $k\in\mathbb{Z}$.

La dérivée étant strictement positive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit que la fonction tangente est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} = -\infty$ et $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} = +\infty$ (ce ne sont pas des formes indéterminées). Ceci nous permet d'obtenir le graphique suivant :



4. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

Pour $a \neq \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$, $b \neq \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$ et $a+b \neq \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$, afin que les tangentes mises en jeu soient définies, on a :

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)} = \frac{\frac{\sin(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)} + \frac{\cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)} - \frac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}} = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

5. On utilise la formule $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1$ que l'on divise par $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ qui est non nul par hypothèse de l'énoncé, on obtient :

$$1 + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

On prend l'inverse et on utilise la notation de l'énoncé : $\frac{1}{1+t^2} = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Or :

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos(\alpha)}{2}$$

Finalement :

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1+\cos(\alpha)}{2} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Exercice 61

Dans cet exercice, on utilise les rappels sur les équations trigonométriques données dans l'encadré.

1. On a :

$$\cos(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} \ [2\pi] \quad \text{ou } x = -\frac{2\pi}{3} \ [2\pi]$$

2. On a :

$$\sin(2x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} \ [2\pi] \text{ ou } 2x = \pi - \frac{\pi}{4} \ [2\pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} \ [\pi] \text{ ou } x = \frac{3\pi}{8} \ [\pi]$$

Remarque. *Vous avez remarqué que l'on divise aussi "le modulo", avez-vous compris pourquoi ?*

3. On a :

$$\cos(x) = \sin(x) \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x \ [2\pi] \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} + x \ [2\pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \ [\pi] \text{ ou } \frac{\pi}{2} = 0 \ [2\pi]$$

Cette dernière condition étant impossible, on en déduit que $x = \frac{\pi}{4}$ $[\pi]$.

4. On a :

$$\cos(x)\sin(3x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \text{ ou } \sin(3x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \ [\pi] \text{ ou } 3x = 0 \ [\pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \ [\pi] \text{ ou } x = 0 \left[\frac{\pi}{3}\right]$$

5. L'équation est équivalente à :

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = -x - \frac{\pi}{4} \ [2\pi] \text{ ou } 2x - \frac{\pi}{3} = x + \frac{\pi}{4} \ [2\pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{36}\left[\frac{2\pi}{3}\right] \text{ ou } x = \frac{7\pi}{12} \ [2\pi]$$

6. On pose $X = \cos(x)$, l'équation devient $X^2 - \frac{3}{2}X - 1 = 0$. On résout sans difficulté cette équation de degré 2 qui a pour racines 2 et $-\frac{1}{2}$. L'équation $\cos(x) = 2$ n'a pas de solution et l'équation $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ a pour solutions les réels x tels que :

$$x = \frac{2\pi}{3} \ [2\pi] \qquad \text{ou} \qquad x = -\frac{2\pi}{3} \ [2\pi]$$

Exercice 62

1. On a $\cos(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ si et seulement si $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ modulo 2π, c'est-à-dire que si et seulement si x appartient à l'un des intervalles $\left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. On a $\sin(x) < -\frac{1}{2}$ si et seulement si $x \in \left]-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right[$ modulo 2π, c'est-à-dire que si et seulement si x appartient à l'un des intervalles $\left]-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
3. On a $-\frac{1}{2} < \sin(2x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ si et seulement si $2x \in \left]-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right]$, c'est-à-dire $x \in \left]-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi\right]$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
4. On se ramène à une inéquation de degré 2 :

$$\begin{aligned}
\cos(x) > \cos\left(\frac{x}{2}\right) &\Leftrightarrow 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1 > 0 \\
&\Leftrightarrow \left[2\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right]\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right] > 0 \\
&\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1 < 0 \text{ et } \cos\left(\frac{x}{2}\right) \neq 1 \\
&\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) < -\frac{1}{2} \text{ et } \frac{x}{2} \neq 0 \ [2\pi] \\
&\Leftrightarrow \frac{x}{2} \in \left]\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right[\text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ et } x \neq 0 \ [4\pi] \\
&\Leftrightarrow x \in \left]\frac{4\pi}{3} + 4k\pi, \frac{8\pi}{3} + 4k\pi\right[\text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ et } x \neq 0 \ [4\pi]
\end{aligned}$$

Exercice 63 On met en facteur $2\sqrt{2}$, on reconnait des valeurs connues pour le cosinus et le sinus puis on utilise la formule $\cos(a - b)$ cela donne :

$$\sqrt{2}\cos(x) + \sqrt{6}\sin(x) = 2\sqrt{2}\Big(\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\Big) = 2\sqrt{2}\Big(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x)\Big) = 2\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Une fois cette transformation faite l'équation se réécrit :

$$2\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=2 \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x=\frac{7\pi}{12}\ [2\pi] \text{ ou } x=\frac{\pi}{12}[2\pi]$$

Remarque. *Plus généralement, on peut transformer une expression de la forme $a\cos(x)+b\sin(x)$ en mettant en facteur $\sqrt{a^2+b^2}$.*

Exercice 64

1. À quoi est égal i^7 ?

   a) 1 b) i c) $-i$ d) -1

   Réponse : c)

   On sait que $i^2=-1$ donc $i^3=-i$ et $i^4=1$, on en déduit que :

   $$i^7=i^4\times i^3=1\times(-i)=-i$$

---

2. À quoi est égal $(1-2i)(-1+3i)$?

   a) $5+5i$ b) $-7+5i$ c) $-5-5i$ d) $-7-5i$

   Réponse : a)

   On développe :

   $$(1-2i)(-1+3i)=-1+3i+2i+6=5+5i$$

---

3. À quoi est égal $\frac{1}{i}$?

   a) i b) $-i$ c) $1-i$ d) $-1+i$

   Réponse : b)

   On multiplie le numérateur et le dénominateur par i pour obtenir :

   $$\frac{1}{i}=\frac{i}{i\times i}=\frac{i}{-1}=-i$$

---

4. À quoi est égal $\frac{1}{-1-i}$?

   a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ b) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ c) $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ d) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

   Réponse : d)

   La technique consiste à multiplier le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur :

   $$\frac{1}{-1-i}=-\frac{1}{1+i}=-\frac{1-i}{(1-i)(1+i)}=-\frac{1-i}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

---

5. À quoi est égal $\frac{2-3i}{1+2i}$?

   a) $-\frac{4+7i}{5}$ b) $\frac{4-i}{5}$ c) $\frac{9-7i}{5}$ d) $\frac{4-7i}{5}$

   Réponse : a)

On applique la même méthode qu'à la question précédente en multipliant par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{2-3i}{1+2i} = \frac{(2-3i)(1-2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{2-4i-3i-6}{5} = -\frac{4+7i}{5}$$

---

6. À quoi est égal $(1+i)^3$?

a) $2+2i$ b) $2-2i$ c) $-2+2i$ d) $-2-2i$

Réponse : c)

On a : $(1+i)^2 = 1^2 + 2i + (i)^2 = 2i$. On en déduit que :

$$(1+i)^3 = 2i(1+i) = -2+2i$$

---

7. Quel est le nombre qui élevé au carré vaut i ?

a) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ b) $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}i$

Réponse : a)

On a :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2 = \frac{1}{2} + i - \frac{1}{2} = i$$

---

8. À quoi est égal $2(-i+1)(-2i)(-i-1)(-1-i)(i-1)$?

a) $16i$ b) $-16i$ c) 16 d) -16

Réponse : a)

On réorganise les termes et on simplifie quelques signes $-$:

$$2(-i+1)(-2i)(-i-1)(-1-i)(i-1) = -4i(1-i)(1+i)(1+i)(-1+i) = -4i \times 2 \times (-2) = 16i$$

---

9. Soit $z \in \mathbb{C}$, à quoi est égal $\overline{i(z-1)}$?

a) $i\overline{z} - i$ b) $i\overline{z} + i$ c) $-i\overline{z} - i$ d) $-i\overline{z} + i$

Réponse : d)

On utilise les propriétés usuelles de la conjugaison pour obtenir :

$$\overline{i(z-1)} = \overline{iz - i} = \overline{i}\overline{z} - \overline{i} = -i\overline{z} + i$$

---

10. Quels sont les nombres complexes z solutions de l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$?

a) i et $-i$ b) $1+i$ et $1-i$ c) $-1+i$ et $-1-i$ d) $2+2i$ et $2-2i$

Réponse : b)

Le discriminant de ce trinôme est : $\Delta = -4$. Il y a deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{2+2i}{2} = 1+i \text{ et } z_2 = \frac{2-2i}{2} = 1-i$$

---

11. Quels sont les nombres complexes z solutions de l'équation $z^2 + (1-i)z - i = 0$?

a) 1 et $-i$ b) 1 et i c) -1 et $-i$ d) -1 et i

Réponse : d)

On vérifie que -1 et i sont des solutions de l'équation proposée.

---

12. Quel est le module de $\dfrac{1}{-3+4i}$?

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ b) $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{1}{25}$ d) $\dfrac{1}{5}$

Réponse : d)

On a :

$$\left|\frac{1}{-3+4i}\right| = \frac{1}{|-3+4i|} = \frac{1}{\sqrt{(-3)^2+4^2}} = \frac{1}{5}$$

---

13. À quoi est égal $e^{i\frac{\pi}{6}}$?

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ b) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

Réponse : a)

On a :

$$e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

---

14. À quoi est égal $-e^{i\frac{\pi}{6}}$?

a) $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ b) $e^{i\frac{7\pi}{6}}$ c) $e^{-i\frac{\pi}{6}}$ d) $e^{-i\frac{7\pi}{6}}$

Réponse : b)

On a :

$$-e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\pi+i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

---

15. À quoi est égal $e^{7i\frac{\pi}{2}}$?

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

Réponse : d)

On a :

$$e^{7i\frac{\pi}{2}} = e^{2i\pi+i\pi+i\frac{\pi}{2}} = e^{2i\pi}e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{2}} = 1\times(-1)\times i = -i$$

---

16. À quoi est égal $e^{-5i\frac{\pi}{4}}$?

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ b) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ c) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

Réponse : b)

On a :

$$e^{-5i\frac{\pi}{4}} = e^{3i\frac{\pi}{4}-2i\pi} = e^{3i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

---

17. À quoi est égal $\overline{e^{i\frac{\pi}{3}}}$?

a) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ c) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ d) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

Réponse : c)

On a :

$$\overline{e^{i\frac{\pi}{3}}} = \overline{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \overline{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

---

18. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, à quoi est égal $\dfrac{1}{e^{i\theta}}$?

a) $e^{i\frac{1}{\theta}}$ $e^{-i\frac{1}{\theta}}$ c) $e^{-i\theta}$ d) $-e^{i\theta}$

Réponse : c)

D'après les propriétés usuelles de l'exponentielle complexe, on a :

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

---

19. À quoi est égal $e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{4}}$?

a) $e^{i\frac{\pi}{12}}$ b) $e^{-i\frac{\pi}{12}}$ c) $-e^{i\frac{\pi}{12}}$ d) $e^{i\frac{\pi}{6}}$

Réponse : a)

D'après les propriétés usuelles de l'exponentielle complexe, on a :

$$e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{3}-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

---

20. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, à quoi est égal $ie^{i\theta}$?

a) $e^{i\frac{\theta}{2}}$ b) $e^{i\theta+\frac{\pi}{2}}$ c) $e^{i\theta+i\frac{\pi}{2}}$ d) $e^{i\theta-i\frac{\pi}{2}}$

Réponse : c)

On a :

$$ie^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\theta} = e^{i\theta+i\frac{\pi}{2}}$$

---

21. Quelle est la forme trigonométrique de $1-\sqrt{3}i$?

a) $\frac{1}{2}\Big(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\Big)$ b) $\frac{1}{2}\Big(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\Big)$ c) $2\Big(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\Big)$ d) $2\Big(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\Big)$

Réponse : d)

On commence par calculer le module :

$$|1-\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = 2$$

On met en facteur le module :

$$1-\sqrt{3}i = 2\Big(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big) = 2\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{3}\Big)+i\sin\Big(-\frac{\pi}{3}\Big)\Big)$$

---

22. Soit z un nombre complexe de module 1, à quoi est égal $\dfrac{1}{z}$?

a) $\dfrac{1}{\overline{z}}$ b) $-z$ c) $-\overline{z}$ d) $\overline{z}$

Réponse : d)

Si z est un nombre complexe de module 1 alors :

$$z\overline{z} = |z|^2 = 1$$

On en déduit que : $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$.

---

23. Quelle est l'image des points du plan complexe d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z+i| \leq 2$?

a) le disque de centre $A(i)$ et de rayon 2 b) le disque de centre $A(i)$ et de rayon $\sqrt{2}$

c) le disque de centre $A(-i)$ et de rayon 2 d) le disque de centre $A(-i)$ et de rayon $\sqrt{2}$

Réponse : c)

Pour $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$|z+i| \leq 2 \Leftrightarrow |z-(-i)| \leq 2$$

Géométriquement cela signifie que la distance du point M d'affixe z au point A d'affixe $-i$ est inférieure ou égale à 2. L'ensemble recherché est le disque de centre A et de rayon 2.

---

24. Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$, à quoi est égal $\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$?

a) $i\dfrac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})}$ b) $-i\dfrac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})}$ c) $i\dfrac{\sin(\frac{\theta}{4})}{\cos(\frac{\theta}{4})}$ d) $2i\dfrac{\cos(\frac{\theta}{4})}{\cos(\frac{\theta}{4})}$

Réponse : a)

On peut déjà remarquer que le dénominateur n'est pas nul car $e^{i\theta} \neq -1$ lorsque $\theta \in]-\pi, \pi[$. On met artificiellement en facteur $e^{i\frac{\theta}{2}}$:

$$\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}} = \frac{2i\sin(\frac{\theta}{2})}{2\cos(\frac{\theta}{2})} = \frac{i\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})}$$

Ceci en utilisant les formules d'Euler.

Exercice 65

Complexe	A	B	C	D	E
Module	5	$4\sqrt{2}$	$\frac{1}{3}$	128	$\sqrt{6+2\sqrt{2}}$
Argument	π	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$

Exercice 66 On cherche les nombres complexes $\omega = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $\omega^2 = -3 - 4i$. On a $\omega^2 = a^2 - b^2 + 2iab$ en identifiant les parties réelles et imaginaires, on a :

$$a^2 - b^2 = -3 \quad (1) \qquad \text{et} \qquad 2ab = -4 \quad (2)$$

On peut également obtenir une troisième équation car $|\omega|^2 = |-3-4i| = 5$ ce qui donne $a^2 + b^2 = 5 \quad (3)$.

On effectue $(1) + (3)$ pour obtenir $2a^2 = 2$ donc $a = \pm 1$. On effectue $(3) - (1)$ pour obtenir $2b^2 = 8$ donc $b = \pm 2$.

De plus l'équation (2) nous apprend que a et b sont de signes opposés, on conserve donc $a = 1$ et $b = -2$ ce qui nous donne le complexe $\omega = 1 - 2i$ et $a = -1$ et $b = 2$ ce qui nous donne $\omega = -1 + 2i$.

Par un calcul direct, on vérifie que $(1-2i)^2 = -3 - 4i$ et $(-1+2i)^2 = -3 - 4i$.

Remarque. *Nous verrons cette année qu'étant donné un nombre complexe non nul z, il existe exactement deux nombres complexes (opposés l'un de l'autre) qui au carré donnent z.*

Exercice 67 Pour ce corrigé, vous n'avez que les réponses. Vous pouvez consulter l'exercice 68 pour une rédaction détaillée sur les calculs de dérivées.

$f_1' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$ $\quad f_2' : x \mapsto 2xe^{x^2}$ $\quad f_3' : x \mapsto -\dfrac{7}{x^8} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{5}{x^6}$

$f_4' : x \mapsto 3(2x+1)(x^2+x)^2$ $\quad f_5' : x \mapsto \dfrac{3}{3x-5}$ $\quad f_6' : x \mapsto \dfrac{-2(x^2-x+1)}{(1-2x)^2}$

$f_7' : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad f_8' : x \mapsto \dfrac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ $\quad f_9' : x \mapsto \dfrac{2(x^4+1)}{x(x^4-1)}$

$f_{10}' : x \mapsto \dfrac{-6x}{(3x^2-1)^2}$ $\quad f_{11}' : x \mapsto \dfrac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$ $\quad f_{12}' : x \mapsto \dfrac{-12x}{(3x^2-1)^3}$

$f_{13}' : x \mapsto -4\sin(1+4x)$ $\quad f_{14}' : x \mapsto \dfrac{2\cos(2x)\cos(3x)+3\sin(2x)\sin(3x)}{\cos^2(3x)}$ $\quad f_{15}' : x \mapsto \dfrac{-1}{2\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x})$

$f_{16}' : x \mapsto \dfrac{2x\sin(x^2)}{\cos(x^2)^2}$ $\quad f_{17}' : x \mapsto \dfrac{2\sin(x)}{\cos(x)^3}$ $\quad f_{18}' : x \mapsto \dfrac{1}{8x^{\frac{7}{8}}}$

Exercice 68

f_1) On pose $u : x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$. Un rapide tableau de signe nous informe que $u(x)$ est positif si et seulement si $x \in [-1,1[$. Ainsi la fonction f_1 est définie sur $[-1,1[$. La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $u(x)$ est strictement positif si et seulement si $x \in]-1,1[$. Par composition, la fonction f_1 est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f_1'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \frac{2}{(1-x)^2 \times 2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+x}}$$

f_2) Le numérateur est défini si et seulement si $3x+7>0$, c'est-à-dire $x > -\dfrac{7}{3}$. Le dénominateur s'annule si et seulement si $x=2$ ou $x=-2$. Les fonctions ln et racine carrée sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction f_2 est définie et dérivable sur $D_{f_2} = \left]-\dfrac{7}{3},-2\right[\cup]-2,2[\cup]2,+\infty[$.

$$\forall x \in D_{f_2},\ f_2'(x) = \frac{\frac{\frac{3}{2\sqrt{3x+7}}}{\sqrt{3x+7}}(4-x^2)+2x\ln(\sqrt{3x+7})}{(4-x^2)^2} = \frac{3(4-x^2)+2x(3x+7)\ln(3x+7)}{2(3x+7)(4-x^2)^2}$$

La dernière inégalité étant obtenue en multipliant et en divisant par $3x+7$.

f_3) Posons $u : x \mapsto x^3+x-2$, la fonction u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynomiale. D'autre part la fonction $x \mapsto x^4$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition, la fonction f_3 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_3'(x) = 4 \times (3x^2+1) \times (x^3+x-2)^3 = (12x^2+4)(x^3+x-2)^3$$

f_4) La fonction $x \mapsto e^x + e^{-x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et elle ne s'annule pas car la fonction exponentielle est strictement positive. Ainsi f_4 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_4'(x) = \frac{-2(e^x - e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^3}$$

f_5) Les fonctions cos et sin et $x \mapsto 2x$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. En tant que produit et composée de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction f_5 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_5'(x) = -2\cos(x)\sin(x) \times \sin(2x) + \left(\cos^2(x)+\frac{3}{2}\right) \times 2\cos(2x) = 8\cos^4(x) - 3$$

La dernière égalité étant obtenue en utilisant les formules trigonométriques : $\cos(2x) = 2\cos^2(x)-1$, $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$ et $\sin^2(x) = 1-\cos^2(x)$.

f_6) La fonction ln est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que la fonction $x \mapsto \ln(x)^4$ également. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Par produit, f_6 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_6'(x) = \frac{4\ln(x)^3 \times \frac{1}{x} \times x - \ln(x)^4}{x^2} = \frac{\ln(x)^3}{x^2}\Big(4-\ln(x)\Big)$$

f_7) La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto x - \dfrac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, ainsi par composition la fonction $x \mapsto e^{x-\frac{1}{x}}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. D'autre part la fonction $x \mapsto x^2-1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule que pour $x=-1$ ou $x=1$. Finalement la fonction f_7 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^* \setminus \{-1,1\}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1,1\},\ f_7'(x) = \frac{(1+\frac{1}{x^2})e^{x-\frac{1}{x}}(x^2-1) - e^{x-\frac{1}{x}}2x}{(x^2-1)^2} = \frac{(x^4-2x^3-1)e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2(x^2-1)^2}$$

Pour cette dernière égalité, on a multiplié le numérateur et le dénominateur par x^2.

f_8) La fonction ln est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus $\ln(x) > 0$ si et seulement si $x > 1$, ce qui démontre que la fonction f_8 est définie et dérivable sur $]1,+\infty[$ et :

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ f_8'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \frac{1}{x\ln(x)}$$

f_9) Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R},\ \sin(x)+2 > 0$. Par composition la fonction $x \mapsto \sqrt{\sin(x)+2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'y annule pas. Par quotient f_9 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_9'(x) = \frac{-\sin(x)\sqrt{\sin(x)+2} - \cos(x) \times \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)+2}}}{\sin(x)+2} = -\frac{\sin^2(x)+4\sin(x)+1}{2(\sin(x)+2)^{\frac{3}{2}}}$$

La dernière égalité étant obtenue en multipliant le numérateur et le dénominateur par $2\sqrt{\sin(x)+2}$ et en utilisant la relation $\cos^2(x) = 1-\sin^2(x)$.

f_{10}) On utilise la fonction de la question h), pour $x \geq 1$, on a :

$$\ln(\ln(x)) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > 1 \Leftrightarrow x > e$$

Ceci démontre que par composition la fonction f_{10} est définie et dérivable sur $]e,+\infty[$ et :

$$\forall x \in]e,+\infty[,\ f_{10}'(x) = \frac{\frac{1}{x\ln(x)}}{\ln(\ln(x))} = \frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}$$

Ceci en utilisant la dérivée trouvée à la question h).

f_{11}) La fonction $x \mapsto 1+\dfrac{2}{x} = \dfrac{x+2}{x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Un rapide tableau de signe montre qu'elle est strictement positive si et seulement si $x \in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$. La fonction sin est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction ln est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition f_{11} est définie et dérivable sur $x \in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$.

$$\forall x \in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[,\ f_{11}'(x) = \frac{-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}\cos\Big(\ln\Big(1+\frac{2}{x}\Big)\Big) = -\frac{2}{x^2+2x}\cos\Big(\ln\Big(1+\frac{2}{x}\Big)\Big)$$

f_{12}) Etudions le signe du trinôme sous la racine carrée. En trouvant les racines, on factorise :

$$x^2+6x-1 = (x-(-3+\sqrt{10}))(x-(-3-\sqrt{10}))$$

Ainsi la quantité sous la racine carrée est strictement positive si et seulement si $x \in]-\infty,-3-\sqrt{10}[\cup]-3+\sqrt{10},+\infty[$. La fonction racine carrée étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que f_{12} est définie et dérivable sur

$]-\infty,-3-\sqrt{10}[\cup]-3+\sqrt{10},+\infty[$ et :

$$\forall x \in]-\infty,-3-\sqrt{10}[\cup]-3+\sqrt{10},+\infty[,\ f_{12}'(x)=\frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x-1}}=\frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x-1}}$$

Remarque. *La notation "$\forall x$" signifie "pour tout x".*

Exercice 69 ▶ 1) $f_1 : x \mapsto \dfrac{2x}{(4+x^2)^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$. On reconnait la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u : x \mapsto 4+x^2$, une primitive de f_1 sur $\mathbb{R}$ est :

$$\boxed{F_1 : x \mapsto -\frac{1}{4+x^2} \text{ définie sur } \mathbb{R}}$$

▶ 2) $f_2 : x \mapsto \dfrac{3x^2}{1+4x^3}$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\sqrt[3]{-\dfrac{1}{4}}\right\}$. On a :

$$f_2(x)=\frac{1}{4}\frac{12x^2}{1+4x^3} \qquad \text{de la forme } \frac{u'}{u} \text{ avec } u(x)=1+4x^3$$

$$\boxed{F_2 : x \mapsto \frac{1}{4}\ln(|1+4x^3|) \text{ définie sur } \mathbb{R}\setminus\left\{\sqrt[3]{-\frac{1}{4}}\right\}}$$

▶ 3) $f_3 : x \mapsto 7\cos(x)\sin^4(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$f_3(x)=\frac{7}{5}\times 5\cos(x)\sin^4(x) \qquad \text{de la forme } 5u'u^4 \text{ avec } u(x)=\sin(x)$$

$$\boxed{F_3 : x \mapsto \frac{7}{5}\sin^5(x) \text{ définie sur } \mathbb{R}}$$

▶ 4) $f_4 : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$f_4(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{x}\times\frac{2\ln(x)}{} \qquad \text{de la forme } 2u'u \text{ avec } u(x)=\ln(x)$$

$$\boxed{F_4 : x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x)^2 \text{ définie sur } \mathbb{R}_+^*}$$

▶ 5) $f_5 : x \mapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On a pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f_5(x)=2\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} \qquad \text{de la forme } u'e^u \text{ avec } u(x)=\sqrt{x}$$

$$\boxed{F_5 : x \mapsto 2e^{\sqrt{x}} \text{ définie sur } \mathbb{R}_+}$$

▶ 6) $f_6 : x \mapsto \dfrac{2x+1}{3x^2+3x+7}$ est définie sur $\mathbb{R}$ car le discriminant du dénominateur est strictement négatif. On a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f_6(x)=\frac{1}{3}\frac{6x+3}{3x^2+3x+7} \qquad \text{de la forme } \frac{u'}{u} \text{ avec } u(x)=3x^2+3x+7$$

$$\boxed{F_6 : x \mapsto \frac{1}{3}\ln(3x^2+3x+7) \text{ définie sur } \mathbb{R}}$$

► 7) $f_7 : x \mapsto 2x(3x^2-1)^3$ est définie sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynomiale. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_7(x) = \frac{1}{3}6x(3x^2-1)^3 \qquad \text{de la forme } u'u^3 \text{ avec } u(x) = 3x^2-1$$

$$\boxed{F_7 : x \mapsto \frac{1}{12}(3x^2-1)^4 \text{ définie sur } \mathbb{R}}$$

► 8) $f_8 : x \mapsto \dfrac{1}{(3x-2)^4}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$, on a :

$$f_6(x) = \frac{1}{3}\frac{3}{(3x-2)^4} \qquad \text{de la forme } \frac{u'}{u^4} \text{ avec } u(x) = 3x-2$$

$$\boxed{F_8 : x \mapsto -\frac{1}{9}\frac{1}{(3x-2)^3} \text{ définie sur } \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}}$$

► 9) $f_9 : x \mapsto (6x^2+8)\sin(x^3+4x)$ est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_9(x) = 2(3x^2+4)\sin(x^3+4x) \qquad \text{de la forme } u'\sin(u) \text{ avec } u(x) = x^3+4x$$

$$\boxed{F_9 : x \mapsto -2\cos(x^3+4x) \text{ définie sur } \mathbb{R}}$$

► 10) $f_{10} : x \mapsto (6x+3)\sqrt{x^2+x+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$ car le discriminant du trinôme sous la racine carrée est strictement négatif. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_{10}(x) = 3(2x+1)\sqrt{x^2+x+1} \qquad \text{de la forme } u'u^{\frac{1}{2}} \text{ avec } u(x) = x^2+x+1$$

$$\boxed{F_{10} : x \mapsto 2(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}} \text{ définie sur } \mathbb{R}}$$

► 11) $f_{11} : x \mapsto \dfrac{x^2}{(x^3-2)^2}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2^{\frac{1}{3}}\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2^{\frac{1}{3}}\}$, on a :

$$f_{11}(x) = \frac{1}{3}\frac{3x^2}{(x^3-2)^2} \qquad \text{de la forme } \frac{u'}{u^2} \text{ avec } u(x) = x^3-2$$

$$\boxed{F_{11} : x \mapsto -\frac{1}{3}\frac{1}{x^3-2} \text{ définie sur } \mathbb{R} \setminus \{2^{\frac{1}{3}}\}}$$

► 12) $f_{12} : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. On reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = \ln(x)$.

$$\boxed{F_{12} : x \mapsto \ln(|\ln(x)|) \text{ définie sur }]0,1[\cup]1,+\infty[}$$

► 13) $f_{13} : x \mapsto \cos^2(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_{13}(x) = \frac{1}{2}\Big(1+\cos(2x)\Big)$$

$$\boxed{F_{13} : x \mapsto \frac{1}{2}\Big(x+\frac{1}{2}\sin(2x)\Big) \text{ définie sur } \mathbb{R}}$$

► 14) $f_{14} : x \mapsto \sqrt{5x+4}$ est définie sur $\Big[-\dfrac{4}{5},+\infty\Big[$. Pour tout $x \in \Big[-\dfrac{4}{5},+\infty\Big[$, on a :

$$f_{14}(x) = \frac{1}{5} \times 5 \times (5x+4)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{de la forme } u'u^{\frac{1}{2}} \text{ avec } u(x) = 5x+4$$

$$\boxed{F_{14} : x \mapsto \frac{2}{15}(5x+4)^{\frac{3}{2}} \text{ définie sur } \left[-\frac{4}{5}, +\infty\right[}$$

▶ 15) $f_{15} : x \mapsto \dfrac{2x+5}{(x^2+5x+8)^4}$, est définie sur $\mathbb{R}$ car le discriminant dénominateur est strictement négatif. On reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u^4}$ avec $u(x) = x^2+5x+8$.

$$\boxed{F_{15} : x \mapsto -\frac{1}{3}\frac{1}{(x^2+5x+8)^3} \text{ définie sur } \mathbb{R}}$$

▶ 16) $f_{16} : x \mapsto \cos(x)\sin(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$. On reconnaît la forme $u'u$ avec $u(x) = \sin(x)$.

$$\boxed{F_{16} : x \mapsto \frac{1}{2}\sin^2(x) \text{ définie sur } \mathbb{R}}$$

▶ 17) $f_{17} : x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x}$ est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_{17}(x) = \frac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$\boxed{F_{17} : x \mapsto x - \ln(1+e^x) \text{ définie sur } \mathbb{R}}$$

▶ 18) $f_{18} : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$:

$$f_{18}(x) = \frac{(1-x)+x}{1-x^2} = \frac{1-x}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x} + \frac{x}{1-x^2}$$

$$\boxed{F_{18} : x \mapsto \ln(|1+x|) - \frac{1}{2}\ln(|1-x^2|) \text{ définie sur } \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}}$$

Remarque. *Une autre méthode consiste à écrire* $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{(1-x)(1+x)} = \dfrac{\alpha}{1-x} + \dfrac{\beta}{1+x}$ *où* α *et* β *sont à déterminer.*

▶ 19) $f_{19} : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x(1+\ln(x)^2)}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1+\ln(x)^2$.

$$\boxed{F_{19} : x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1+\ln(x)^2) \text{ définie sur } \mathbb{R}_+^*}$$

▶ 20) $f_{20} : x \mapsto \dfrac{x^4}{2+x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. On a :

$$x^4 = (x+2)(x^3-2x^2+4x-8)+16$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, on a :

$$f_{20}(x) = \frac{(x+2)(x^3-2x^2+4x-8)+16}{x+2} = x^3-2x^2+4x-8+\frac{16}{x+2}$$

$$\boxed{F_{20} : x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 8x + 16\ln(|x+2|) \text{ définie sur } \mathbb{R} \setminus \{2\}}$$

Exercice 70

1. On pose :

$$v(t) = t, \qquad v'(t) = 1$$
$$u'(t) = \cos(t), \qquad u(t) = \sin(t)$$

Les fonctions u, v, u' et v' sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut appliquer la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos(t)dt = \Big[t\sin(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)dt = \frac{\pi}{2} - \Big[-\cos(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

2. On pose :

$$v(t) = t^2 + 2t + 3, \qquad v'(t) = 2t + 2$$
$$u'(t) = e^t, \qquad u(t) = e^t$$

Les fonctions u, v, u' et v' sont continues sur $[0, 1]$, on peut appliquer la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^1 (t^2 + 2t + 3)e^t dt = \Big[(t^2 + 2t + 3)e^t\Big]_0^1 - \int_0^1 (2t + 2)e^t dt = 6e - 3 - \int_0^1 (2t + 2)e^t dt$$

Pour calculer la seconde intégrale, on effectue une nouvelle intégration par parties :

$$w(t) = 2t + 2, \qquad w'(t) = 2$$
$$u'(t) = e^t, \qquad u(t) = e^t$$

Les fonctions u, w, u' et w' sont continues sur $[0, 1]$, on peut appliquer la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^1 (2t + 2)e^t dt = \Big[(2t + 2)e^t\Big]_0^1 - \int_0^1 2e^t dt = 4e - 2 - 2[e^t]_0^1 = 4e - 2 - 2e + 2 = 2e$$

Finalement :

$$\int_0^1 (t^2 + 2t + 3)e^t dt = 4e - 3$$

Remarque. *Lors d'une intégration par parties, on cherchera à faire chuter le degré du polynôme en dérivant.*

3. On pose :

$$v(t) = \ln(t), \qquad v'(t) = \frac{1}{t}$$
$$u'(t) = 1, \qquad u(t) = t$$

Les fonctions u, v, u' et v' sont continues sur $[0, 1]$, on peut appliquer la formule d'intégration par parties :

$$\int_1^e \ln(t)dt = \Big[t\ln(t)\Big]_1^e - \int_1^e t \times \frac{1}{t} dt = e - (e - 1) = 1$$

Exercice 71

1. • On factorise par le terme prépondérant :

$$x - 1 - e^x = e^x\left(\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} - 1\right)$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ d'après les résultats usuels de croissances comparées. On en déduit que :

$$\lim_{x \to +\infty} (x - 1 - e^x) = -\infty$$

• On a :

$$\frac{x - 1}{1 + e^x + e^{-x}} = \frac{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{e^x\left(\frac{1}{e^x} + 1 + e^{-2x}\right)}$$

On a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{1+e^x+e^{-x}} = 0$$

- En $-\infty$, le terme prépondérant au dénominateur est e^{-x} que l'on met en facteur :

$$\frac{x-1}{1+e^x+e^{-x}} = \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{e^{-x}\left(\frac{1}{e^{-x}}+e^{2x}+1\right)}$$

On a : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = 0$ donc :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{1+e^x+e^{-x}} = 0$$

- Pour $x > 0$, on a :

$$\sqrt{4x^2+x} - x = x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}} - 1\right)$$

Sous cette forme-là, ce n'est plus indéterminé et on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+x} - x = +\infty$$

2. Pour $x > 0$, on a :

$$\sqrt{x^2+x} - x = \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{x}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)}$$

Sous cette forme-là, ce n'est plus une forme indéterminée et :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \frac{1}{2}$$

3. • Pour $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, on a :

$$\frac{\ln(1+x)}{x-x^2} = \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{1}{1-x}$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ en reconnaissant le taux d'accroissement de $f : x \mapsto \ln(1+x)$ en 0. On en déduit que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x-x^2} = 1$$

- Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\frac{\sin(3x)}{5x} = \frac{\sin(3x)}{3x} \times \frac{3x}{5x}$$

Or $\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 1$. Finalement :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{5x} = \frac{3}{5}$$

- Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$:

$$\frac{2\sin(x)-1}{6x-\pi} = \frac{2}{6}\,\frac{\sin(x)-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3}\,\frac{\sin(x)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ceci en reconnaissant le taux d'accroissement en $\dfrac{\pi}{6}$ de la fonction sin. Finalement :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin(x)-1}{6x-\pi} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Exercice 72

1. 0. Ce n'est pas une forme indéterminée.
2. $+\infty$. Ce résultat sera déduit des croissances comparées usuelles. La fonction $x \mapsto x+2$ est prépondérante par rapport à la fonction ln quand x tend vers $+\infty$.
3. 0. Ce n'est pas une forme indéterminée.
4. Pas de limite. Cette fonction n'a pas de limite en $+\infty$, on aura les outils pour le démontrer en cours d'année.
5. 1
6. 0
7. $+\infty$
8. 0. C'est une forme indéterminée que l'on peut lever en factorisant, on a :
$$\frac{x^2-2x+1}{2x^2+2x-4} = \frac{(x-1)^2}{2(x-1)(x+2)} = \frac{x-1}{2(x+2)}$$
Sous cette forme là, il est clair que la limite vaut 0.
9. $\frac{1}{2}$. La limite d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$ est celle des termes de plus haut degré :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+1}{2x^2+2x-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$
10. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. On a le résultat par composition des limites, en utilisant : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{2x-3} = \frac{1}{2}$.
11. $\frac{1}{12}$. C'est une forme indéterminée que l'on peut lever en factorisant :
$$\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} = \frac{\sqrt{x}-2}{(x-1)(x-4)} = \frac{\sqrt{x}-2}{(x-1)(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x}+2)}$$
Sous cette forme là, il est clair que la limite est $\frac{1}{12}$.
12. 5
13. 1
14. 0
15. 1. Ce n'est pas une forme indéterminée.
16. 0
17. $\frac{1}{2}$
18. $+\infty$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x - \sin(x) \geq x - 1$ car $\sin(x) \geq -1$ ainsi $\lim_{x\to+\infty} x - \sin(x) = +\infty$. On en déduit le résultat demandé par composition des limites.
19. $\frac{1}{3}$
20. -2
21. 2

Exercice 73

1. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:
$$\mathcal{H}_n \ : \ \sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$
   - **Initialisation.** Pour $n = 0$, la formule devient $0 = 0$.

- **Hérédité.** On suppose la formule vraie au rang n avec $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \Big(\sum_{k=0}^{n} k\Big) + (n+1) = \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

C'est bien la formule au rang $n+1$, $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et termine la récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$.

2. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}_n \ : \ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, la formule devient $0 = 0$.
- **Hérédité.** On suppose la formule vraie au rang n avec $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \Big(\sum_{k=0}^{n} k^2\Big) + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)$$

Ceci après simplifications. C'est bien la formule au rang $n+1$, $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et termine la récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

3. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}_n \ : \ \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, la formule devient $0 = 0$.
- **Hérédité.** On suppose la formule vraie au rang n avec $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \Big(\sum_{k=0}^{n} k^3\Big) + (n+1)^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$$

Ceci après simplifications. C'est bien la formule au rang $n+1$, $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et termine la récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

Remarque. *Plus généralement, il n'y a pas de formule simple donnant* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^p$ *où* $p \in \mathbb{N}$.

4. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}_n \ : \ 7^n - 1 \text{ est divisible par } 6$$

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, 0 est bien divisible par 6.
- **Hérédité.** On suppose la formule vraie au rang n avec $n \in \mathbb{N}$ fixé, c'est-à-dire que $7^n - 1$ est divisible par 6. On en déduit qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $7^n - 1 = 6k$. On multiplie cette relation par 7 : $7^{n+1} - 7 = 42k$, ce qui donne $7^{n+1} - 1 = 6 \times (8k)$ ainsi $7^{n+1} - 1$ est divisible par 6. La propriété $\mathcal{H}_{n+1}$ est donc vraie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ est divisible par 6.

5. Démontrons par récurrence pour $n \geq 4$:

$$\mathcal{H}_n \ : \ 2^n \geq n^2$$

- **Initialisation.** Pour $n = 4$, on a $n^2 = 16$ et $2^4 = 16$ ainsi $\mathcal{H}_4$ est vraie.
- **Hérédité.** On suppose que $n^2 \leq 2^n$ pour $n \geq 4$ fixé. On a :

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq 2^n + 2n + 1$$

Si l'on parvient à démontrer que $2n+1 \leq 2^n$, on aura : $(n+1)^2 \leq 2^n + 2^n = 2^{n+1}$ ce qui terminera la récurrence. On a $n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2 \geq 0$ car $n \geq 4$ donc $n^2 \geq 2n+1$. Finalement :

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq 2^n + 2n + 1 \leq 2^n + n^2 \leq 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

Ce qui démontre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et termine la récurrence. Pour tout $n \geq 4$, $n^2 \leq 2^n$.

6. On considère l'hypothèse suivante que l'on va démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{H}_n \;:\; 2^{n-1} \leq n! \leq n^n$$

• **Initialisation.** Pour $n = 1$, la double inégalité devient : $2^0 \leq 1! \leq 1^1$, c'est-à-dire $1 \leq 1 \leq 1$. Ainsi $\mathcal{H}_1$ est vraie.

• **Hérédité.** On suppose que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour un entier naturel non nul n fixé. On a donc $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$, on multiplie cette relation par $(n+1)$ pour obtenir :

$$2^{n-1}(n+1) \leq n!(n+1) \leq n^n(n+1)$$

Or $2 \leq n+1$ car $n \geq 1$ donc $2^n = 2^{n-1} \times 2 \leq 2^{n-1}(n+1) \leq n!(n+1) = (n+1)!$. On a bien $2^n \leq (n+1)!$.
D'autre part : $n^n(n+1) \leq (n+1)^n(n+1) = (n+1)^{n+1}$ ainsi on a bien $(n+1)! \leq (n+1)^{n+1}$. Finalement :

$$2^n \leq (n+1)! \leq (n+1)^{n+1}$$

On a démontré que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie, ce qui termine la récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

Exercice 74

1. Soit $x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \Rightarrow x > 0$
2. Soit $x \in \mathbb{N} : x \geq 1 \Leftrightarrow x > 0$
3. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R} : x = y \Rightarrow x^2 = y^2$
4. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R} : |x| + |y| = 0 \Rightarrow |x + y| = 0$
5. Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_+ : x = y \Leftrightarrow x^2 = y^2$
6. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = y$
7. Soient $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R} : x = y \Rightarrow xz = yz$
8. Soit $x \in \mathbb{R} : x^2 \geq x \Leftarrow x > 1$