Proposition. $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif.

Dans toute la démonstration, on se donne $A = (a_n)$, $B = (b_n)$ et $C = (c_n)$ trois polynômes. Comme A et B sont des polynômes :

$$\exists d \in \mathbb{N},\ \forall n > d,\ a_n = 0 \text{ et } \exists e \in \mathbb{N},\ \forall n > e,\ b_n = 0$$

• **Montrons que + est une l.c.i sur** $\mathbb{K}[X]$. On a : $A + B = (a_n + b_n)$, nous devons démontrer que la suite $(a_n + b_n)$ est nulle à partir d'un certain rang, on a :

$$\forall n > \ \max(d, e),\ a_n + b_n = 0$$

Ce qui démontre que $A + B$ est un polynôme.

• **Montrons que** $\times$ **est une l.c.i**, c'est-à-dire que $A \times B$ est un polynôme. On note $r_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ le coefficient de degré n de $A \times B$. Prenons $n > d + e$, on a :

- ▶ si $k \in [\![0, d]\!]$, on a : $n - k \in [\![n - d, n]\!]$, or $n - d > e$ donc $b_k = 0$.
- ▶ si $k \in [\![d + 1, n]\!]$, on a : $a_k = 0$

Ce qui démontre que $r_n = 0$ pour $n > d + e$. La suite $(r_n) = A \times B$ est nulle à partir d'un certain rang : c'est un polynôme.

• **Montrons que** $(\mathbb{K}[X], +)$ **est un groupe.**

▶ L'addition est commutative car :

$$A + B = (a_n + b_n) = (b_n + a_n) = B + A$$

▶ L'addition est associative car :

$$(A + B) + C = (a_n + b_n) + (c_n) = ((a_n + b_n) + c_n) = (a_n + (b_n + c_n)) = A + (B + C)$$

▶ Le polynôme nul est le neutre de l'addition car :

$$A + 0 = (a_n + 0) = (a_n) = A$$

▶ Chaque polynôme $A = (a_n)$ possède un opposé pour la loi +, le polynôme noté $-A = (-a_n)$, en effet :

$$A + (-A) = (a_n + (-a_n)) = (0) = 0$$

• **La loi** $\times$ **est commutative**. En effet, par renversement de la somme, on a :

$$A \times B = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}\right) = B \times A$$

• **La loi** $\times$ **possède un neutre**, le polynôme noté $1 = (x_n)$ avec $x_0 = 1$ et $x_n = 0$ pour $n \geq 1$. On a :

$$1 \times A = \left(\sum_{k=0}^{n} x_k a_{n-k}\right) = (a_n) = A$$

puisque dans la somme, seul le terme correspondant à $k=0$ est non nul.

• **Démontrons que la loi $\times$ est associative**, c'est-à-dire que $(A\times B)\times C = A\times(B\times C)$. On note $r_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ le coefficient de degré n de $A\times B$ et $s_n = \sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}$ le coefficient de degré n de $B\times C$. Le coefficient de degré n de $(A\times B)\times C$ est alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} r_i c_{n-i} &= \sum_{i=0}^{n} \Big(\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}\Big) c_{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} c_{n-i} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} a_k b_{i-k} c_{n-i} && \text{en intervertissant les deux sommes} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} a_k b_j c_{n-k-j} && \text{en posant } j=i-k \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{n-k} b_j c_{n-k-j} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k s_{n-k}
\end{aligned}$$

On reconnaît le coefficient de degré n de $A\times(B\times C)$. D'où le résultat : $(A\times B)\times C = A\times(B\times C)$.

• Il reste à démontrer que **la multiplication est distributive par rapport à l'addition**. Le coefficient de degré n de $A\times(B+C)$ est :

$$\sum_{k=0}^{n} a_n(b_{n-k}+c_{n-k}) = \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_n c_{n-k}$$

On reconnaît le coefficient de degré n de $(A\times B)+(A\times C)$. Ce qui démontre que $A\times(B+C) = (A\times B)+(A\times C)$.