Fractions rationnelles

Table des matières

Le but de la fin du chapitre est d'apprendre des méthodes de calcul, assurez-vous de bien comprendre chaque étape des exemples présentés.

Rappels utiles :

- $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \bar{j})$
- $j^2 = \bar{j}$
- $1 + j + j^2 = 0$
- $j = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

2 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Nous verrons après la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$.

2.1 Théorie

Théorème (décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$).
Soit $R \in \mathbb{C}(X)$, R s'écrit de manière unique sous la forme :

$$R = E + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{ij}}{(X - \lambda_i)^j}$$

- E est la partie entière de R
- les $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq r}$ sont les pôles de R de multiplicité m_i
- les a_{ij} sont des complexes à déterminer, ils sont uniques.

Exemple : Soit $R = \dfrac{X^2+3}{(X-1)^3(X-2)(X^2+1)^2}$. La fraction R est sous forme irréductible car les racines du numérateur $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$ ne sont pas racines du dénominateur. Le degré de R vaut -6, ainsi la partie entière de R est nulle. Les pôles de R sont : 1 de multiplicité 3, 2 de multiplicité 1, i de multiplicité 2 et $-i$ de multiplicité 2. Le théorème nous indique la forme théorique que doit avoir la décomposition en éléments simples de R :

$$R = \underbrace{\frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{(X-1)^2} + \frac{\gamma}{(X-1)^3}}_{\text{car 1 pôle triple}} + \underbrace{\frac{\delta}{X-2}}_{\text{car 2 pôle simple}} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{X-i} + \frac{\varphi}{(X-i)^2}}_{\text{car } i \text{ pôle double}} + \underbrace{\frac{\rho}{X+i} + \frac{\lambda}{(X+i)^2}}_{\text{car } -i \text{ pôle double}}$$

C'est important de savoir sous quelle forme chercher la décomposition en éléments simples mais le plus difficile est bien entendu de déterminer les coefficients complexes : α, β, γ, δ, ε, φ, ρ et λ.

Remarque : La preuve du théorème n'est pas au programme.

2.2 Cas des pôles simples

Voyons sur un exemple comment décomposer en éléments simples une fraction rationnelle qui n'a que des pôles simples.

Exemple 1 : Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle : $R = \dfrac{X^5}{X^4 - 1}$.

$\boxed{\text{Étape 1.}}$ La fraction est-elle sous forme irréductible ?

Ici, c'est le cas, il n'y a aucune simplification possible entre numérateur et dénominateur. En effet, la seule racine du numérateur, 0, n'est pas racine du dénominateur. Si la fraction rationnelle n'est pas irréductible, on la simplifie avant de passer à l'étape suivante.

Étape 2. On cherche la partie entière de R. Si $\deg(R) < 0$, on sait que la partie entière est nulle et que l'on peut sauter cette étape. Ici $\deg(R) = 1$, on utilise la méthode vue en cours pour décomposer R sous la forme $E + H$. Cela consiste à effectuer la division euclidienne de X^5 par $X^4 - 1$, ce qui donne :

$$X^5 = X(X^4 - 1) + X \text{ d'où : } \frac{X^5}{X^4 - 1} = \underbrace{X}_{E} + \underbrace{\frac{X}{X^4 - 1}}_{H}$$

Dans la suite des calculs, on oublie la partie entière que l'on ajoutera à la fin de la décomposition. On va décomposer la fraction rationnelle $H = \dfrac{X}{X^4 - 1}$ qui est bien de degré strictement négatif.

Étape 3. On cherche les pôles de H et leurs multiplicités correspondantes. On sait que les racines de $X^4 - 1$ sont les 4 racines 4-ièmes de l'unité : 1, -1, i et $-i$. Ces quatre racines sont des pôles simples.

Étape 4. On écrit la forme de la décomposition en éléments simples :

$$H = \frac{X}{X^4 - 1} = \frac{X}{(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-i} + \frac{d}{X+i} \quad (\bigstar)$$

où a, b, c et d sont des complexes à déterminer.

Étape 5. On va enfin déterminer les coefficients !

• Détermination de a. On multiplie la relation $(\bigstar)$ par $X - 1$, cela donne :

$$(X-1)\frac{X}{(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)} = \frac{a(X-1)}{X-1} + \frac{b(X-1)}{X+1} + \frac{c(X-1)}{X-i} + \frac{d(X-1)}{X+i}$$

On simplifie les deux membres de la relation :

$$\frac{X}{(X+1)(X-i)(X+i)} = a + \frac{b(X-1)}{X+1} + \frac{c(X-1)}{X-i} + \frac{d(X-1)}{X+i}$$

L'idée est alors d'évaluer en $X = 1$, cela donne :

$$\frac{1}{2(1-i)(1+i)} = a + 0 + 0 + 0$$

On simplifie et on trouve $a = \dfrac{1}{4}$.

Cette technique s'appelle la ***méthode de multiplication-évaluation****. C'est la technique principale pour déterminer les coefficients correspondants aux pôles simples.*

• Détermination de c. On utilise également la méthode de multiplication-évaluation. On multiplie la relation $(\bigstar)$ par $X - i$ et on évalue en i. Cela donne :

$$[(X-i)H](i) = \frac{i}{(i-1)(i+1)(i+i)} = c$$

En simplifiant, on trouve : $c = -\dfrac{1}{4}$.

• Détermination de b et d. On pourrait utiliser à nouveau la technique de multiplication-évaluation pour déterminer b puis d, mais il y a une petite astuce pour gagner du temps. On reprend la relation $(\bigstar)$ et on remplace X par $-X$:

$$\frac{-X}{X^4 - 1} = \frac{a}{-X-1} + \frac{b}{-X+1} + \frac{c}{-X-i} + \frac{d}{-X+i}$$

On simplifie pour faire apparaître les mêmes dénominateurs que dans la décomposition $(\bigstar)$:

$$\frac{-X}{X^4 - 1} = \frac{-a}{X+1} + \frac{-b}{X-1} + \frac{-c}{X+i} + \frac{-d}{X-i}$$

On multiplie par -1 :

$$\frac{X}{X^4-1} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+i} + \frac{d}{X-i} \quad (\bigstar\bigstar)$$

À présent, il s'agit de regarder les deux décompositions ($\bigstar$) et ($\bigstar\bigstar$). D'après le théorème, la décomposition en éléments simples est unique ! On peut donc identifier les coefficients. Ce qui donne :

$$\begin{cases} a = b \\ b = a \\ c = d \\ d = c \end{cases}$$

Ce qui nous permet d'affirmer que $b = \dfrac{1}{4}$ et $d = -\dfrac{1}{4}$.

Cette technique ne fonctionne que si la fraction rationnelle à décomposer est paire ou impaire. Dans cet exemple, H est impaire.

Étape 6. On écrit la décomposition trouvée sans oublier la partie entière calculée à l'étape 2.

$$R = X + \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1} - \frac{1}{X-i} - \frac{1}{X+i}\Big)$$

▶ **À vous de faire vos premières décompositions en éléments simples avec les exercices 8.a) et 8.b).**

2.3 Cas des pôles multiples

Là aussi un exemple va très bien illustrer différentes méthodes à notre disposition.

Exemple 2 : Décomposons $R = \dfrac{X}{(1+X+X^2)(X+1)^3}$ dans $\mathbb{C}(X)$.

Étape 1. La fraction rationnelle R est irréductible car la seule racine du numérateur n'est pas racine du dénominateur.

Étape 2. On a $\deg(R) < 0$: la partie entière de R est nulle.

Étape 3. Les racines du dénominateur sont j et $\bar{j}$ qui sont des pôles simples et -1 qui est un pôle triple.

Étape 4. La décomposition en éléments simples de R est à rechercher sous la forme :

$$R = \frac{X}{(X-j)(X-\bar{j})(X+1)^3} = \frac{a}{X-j} + \frac{b}{X-\bar{j}} + \frac{c}{(X+1)^3} + \frac{d}{(X+1)^2} + \frac{e}{X+1} \quad (\bigstar)$$

Étape 5.

• Détermination de a. C'est un pôle simple, on utilise la méthode de multiplication-évaluation. En reprenant la relation ($\bigstar$), on a :

$$[(X-j)R](j) = \frac{j}{(j-\bar{j})(j+1)^3} = a$$

Ici, il y a un peu de calcul pour simplifier tout cela :

$$j - \bar{j} = \Big(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) - \Big(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = i\sqrt{3}$$

$$(j+1)^3 = (-j^2)^3 = -1$$

Ce qui donne $a = \dfrac{-j}{i\sqrt{3}} = \dfrac{ij}{\sqrt{3}}$.

• Détermination de b. La méthode de multiplication-évaluation marche très bien ici, mais voyons une variante. On conjugue la relation ($\bigstar$) :

$$\overline{R} = \frac{\bar{a}}{X-\bar{j}} + \frac{\bar{b}}{X-j} + \frac{\bar{c}}{(X+1)^3} + \frac{\bar{d}}{(X+1)^2} + \frac{\bar{e}}{X+1} \quad (\bigstar\bigstar)$$

On remarque que l'on ne conjugue pas l'indéterminée X. La fraction R est à coefficients réels donc $\overline{R} = R$. Les écritures ($\bigstar$) et ($\bigstar\bigstar$) sont deux décompositions en éléments simples de R, par unicité on peut identifier les coefficients :

$$\begin{cases} a = \bar{b} \\ b = \bar{a} \\ c = \bar{c} \\ d = \bar{d} \\ e = \bar{e} \end{cases}$$

On en déduit que $b = \dfrac{-i\bar{j}}{\sqrt{3}}$. D'ailleurs, on sait aussi que c, d et e sont réels.

• <u>Détermination de c.</u> On utilise la méthode de multiplication-évaluation, mais ici il faut multiplier la relation ($\bigstar$) par $(X+1)^3$, voyons en détail ce que cela donne.

$$(X+1)^3 R = \frac{(X+1)^3 X}{(X-j)(X-\bar{j})(X+1)^3} = \frac{a(X+1)^3}{X-j} + \frac{b(X+1)^3}{X-\bar{j}} + \frac{c(X+1)^3}{(X+1)^3} + \frac{d(X+1)^3}{(X+1)^2} + \frac{e(X+1)^3}{X+1}$$

On simplifie :

$$(X+1)^3 R = \frac{X}{(X-j)(X-\bar{j})} = \frac{a(X+1)^3}{X-j} + \frac{b(X+1)^3}{X-\bar{j}} + c + d(X+1) + e(X+1)^2$$

On évalue en -1 :

$$[(X+1)^3 R](-1) = \frac{-1}{(-1-j)(-1-\bar{j})} = 0 + 0 + c + 0 + 0$$

On trouve $c = -1$ en se souvenant que $1 + j + j^2 = 0$.

• <u>Échec dans la détermination de d.</u> On a bien compris cette technique de multiplication-évaluation et on imagine que l'on va pouvoir l'appliquer ici en multipliant R par $(X+1)^2$. Hélas cela ne marche pas du tout...Voyons pourquoi !

$$(X+1)^2 R = \frac{(X+1)^2 X}{(X-j)(X-\bar{j})(X+1)^3} = \frac{a(X+1)^2}{X-j} + \frac{b(X+1)^2}{X-\bar{j}} + \frac{c(X+1)^2}{(X+1)^3} + \frac{d(X+1)^2}{(X+1)^2} + \frac{e(X+1)^2}{X+1}$$

On simplifie :

$$(X+1)^2 R = \frac{X}{(X-j)(X-\bar{j})(X+1)} = \frac{a(X+1)^2}{X-j} + \frac{b(X+1)^2}{X-\bar{j}} + \frac{c}{X+1} + d + e(X+1)$$

C'est impossible d'évaluer en -1 à cause de la présence du $X+1$ à certains dénominateurs.

On se heurtera au même genre de problème si l'on tente de trouver e en multipliant par $X+1$ puis en évaluant en -1. Nous allons voir une autre technique.

• <u>Détermination de e.</u> On multiplie la fraction rationnelle par X :

$$XR = \frac{X^2}{(X-j)(X-\bar{j})(X+1)^3} = \frac{aX}{X-j} + \frac{bX}{X-\bar{j}} + \frac{cX}{(X+1)^3} + \frac{dX}{(X+1)^2} + \frac{eX}{X+1}$$

On évalue en $x \in \mathbb{R}$:

$$xR(x) = \frac{x^2}{(x-j)(x-\bar{j})(x+1)^3} = \frac{ax}{x-j} + \frac{bx}{x-\bar{j}} + \frac{cx}{(x+1)^3} + \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{ex}{x+1}$$

Puis, on fait tendre x vers $+\infty$ et on utilise que la limite en $+\infty$ d'une fraction rationnelle est celle des termes de plus haut degré. On obtient :

$$0 = a + b + e$$

On connaît a et b donc on va pouvoir trouver e. On a :

$$a + b = \frac{ij}{\sqrt{3}} + \frac{-i\bar{j}}{\sqrt{3}} = \frac{i}{\sqrt{3}}\left(j - \bar{j}\right) = \frac{i}{\sqrt{3}} 2i\mathrm{Im}(j) = \frac{i}{\sqrt{3}} 2i \frac{\sqrt{3}}{2} = -1$$

On trouve $e = 1$.

On préfèrera ici remplacer X par x pour ne pas faire tendre une indéterminée, qui n'est pas un réel, vers $+\infty$.

• <u>Détermination de d.</u> Quand il ne reste qu'un coefficient à trouver, une bonne technique est d'évaluer la relation ($\bigstar$) en un point qui n'est bien sûr pas un pôle de la fraction rationnelle. Le plus simple est d'essayer en 0.

$$R(0) = \frac{0}{(0-j)(0-\bar{j})(0+1)^3} = \frac{a}{0-j} + \frac{b}{0-\bar{j}} + \frac{c}{(0+1)^3} + \frac{d}{(0+1)^2} + \frac{e}{0+1} \quad (\bigstar)$$

Ce qui donne :

$$0 = \frac{a}{-j} + \frac{b}{-\bar{j}} + c + d + e$$

On connaît tous les coefficients sauf d, on trouve $d = 0$.

Étape 6. On trouve :

$$R = \frac{i}{\sqrt{3}}\Big(\frac{j}{X-j} - \frac{j^2}{X-j^2}\Big) - \frac{1}{(X+1)^3} + \frac{1}{X+1}$$

Remarque : On retiendra que dans le cas d'un pôle multiple, la méthode de multiplication-évaluation ne permet que de trouver le terme de plus haut degré au dénominateur : ici $\frac{c}{(X+1)^3}$.

▶ **À vous de jouer avec les exercices 8.c) et 8.i).**

2.4 Méthode de multiplication-dérivation-évaluation

Nous allons voir sur un exemple une dernière méthode bien pratique dans le cas de pôles multiples.

Exemple 3 : Décomposer sur $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle : $R = \frac{1}{X(X-2)^2}$. Passons plus vite sur les premières étapes pour en venir à la variante. La fraction rationnelle est irréductible et de degré strictement négatif. Sa décomposition en éléments simples est de la forme :

$$R = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{(X-2)^2} \ (\bigstar)$$

Pour trouver a et c, on utilise la méthode de multiplication-évaluation :

$$[XR](0) = a = \frac{1}{4}$$

$$[(X-2)^2R](2) = c = \frac{1}{2}$$

• Détermination de b.
On multiplie la relation ($\bigstar$) par $(X-2)^2$:

$$(X-2)^2R = \frac{(X-2)^2}{X(X-2)^2} = \frac{a(X-2)^2}{X} + \frac{b(X-2)^2}{X-2} + \frac{c(X-2)^2}{(X-2)^2}$$

On simplifie :

$$(X-2)^2R = \frac{1}{X} = \frac{a(X-2)^2}{X} + b(X-2) + c$$

On dérive :

$$[(X-2)^2R]' = -\frac{1}{X^2} = \frac{2a(X-2)X - a(X-2)^2}{X^2} + b$$

On évalue en 2 :

$$[(X-2)^2R]'(2) = -\frac{1}{2^2} = 0 + b$$

On trouve $b = -\frac{1}{4}$.

Pas besoin de refaire le calcul à chaque fois, avec cette méthode vous aurez systématiquement le coefficient noté b dans l'exemple.

On conclut :

$$R = \frac{1}{4X} - \frac{1}{4(X-2)} + \frac{1}{2(X-2)^2}$$

▶ **Testez cette nouvelle méthode avec l'exercice 8.f)**

Remarque : Cette méthode se généralise, par exemple si l'on considère $R = \dfrac{1}{(X-1)(X-2)^4}$*, la décomposition en éléments simples s'écrit :*

$$R = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{(X-2)^2} + \frac{d}{(X-2)^3} + \frac{e}{(X-2)^4}$$

- *On sait que :* $e = [(X-2)^4 R](2)$.
- *On vient de voir que :* $d = [(X-2)^4 R]'(2)$.
- *On a aussi :* $2c = [(X-2)^4 R]''(2)$.
- *On a aussi :* $6b = [(X-2)^4 R]^{(3)}(2)$.

Les coefficients qui apparaissent sont des factorielles, issues des dérivations successives.

2.5 Bilan

Rappelons les différentes méthodes que l'on a vues :

▶ **Multiplication-évaluation** : la méthode principale pour les pôles simples et pour les termes de plus haut degré des pôles multiples.

▶ **Parité-Imparité :** si la fraction rationnelle est paire ou impaire, on remplace X par $-X$ et on utilise l'unicité de la décomposition en éléments simples pour obtenir des relations entre les coefficients.

▶ **Conjugaison :** si la fraction rationnelle est réelle, on la conjugue et on utilise l'unicité de la décomposition en éléments simples pour obtenir des relations entre les coefficients.

▶ **Multiplication par x et passage à la limite :** on multiplie par x et on passe à la limite quand x tend vers $+\infty$, dans le cas d'un pôle multiple.

▶ **Evaluation en un point :** à réserver s'il ne reste qu'un coefficient à trouver.

▶ **Multiplication-dérivation-évaluation :** pour des pôles multiples.

Remarque : En aucun cas, on ne réduira au même dénominateur pour identifier et trouver les coefficients, c'est la pire méthode.

2.6 Une dernière méthode

Proposition Soient $R = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{C}(X)$ irréductible. On suppose que $\lambda \in \mathbb{C}$ est un **pôle simple** de R, de sorte que dans la décomposition en éléments simples de R un terme de la forme $\dfrac{a}{X-\lambda}$ va apparaître. On a : $a = \dfrac{A(\lambda)}{B'(\lambda)}$.

Démonstration : λ *est un pôle simple de* R *donc une racine simple de* B*, il est possible d'écrire :*

$$B = (X-\lambda)C \text{ où } C \in \mathbb{C}[X] \text{ avec } C(\lambda) \neq 0$$

La décomposition en éléments simples de R *s'écrit sous la forme :* $R = \dfrac{a}{X-\lambda} + Q$ *où* Q *n'admet pas* λ *pour pôle. On a :*

$$\frac{A}{C} = (X-\lambda)R = a + (X-\lambda)Q$$

On évalue en λ *pour obtenir* $\dfrac{A(\lambda)}{C(\lambda)} = a$*. Enfin, il s'agit de remarquer que* $C(\lambda) = B'(\lambda)$ *car :*

$$B' = C + (X-\lambda)C'$$

Exemple 4 : Cette technique est très efficace pour des exercices un peu plus théoriques. Voyons un exemple très très classique à connaître par coeur. Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $R = \dfrac{1}{X^n - 1}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

La fraction est irréductible, son degré est strictement négatif. Les pôles sont simples, ce sont les racines n-ièmes de l'unité : $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ où $k \in [\![0, n-1]\!]$. La décomposition est de la forme :

$$R = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{X - \omega_k}$$

où les $(a_k)_{0\leq k\leq n-1}$ sont des complexes à déterminer. Comme ce sont des pôles simples, on pourrait utiliser la méthode de mutiplication-évaluation, ici c'est vraiment fastidieux : il faut essayer pour s'en convaincre. La proposition précédente s'applique très bien, on a : $R = \dfrac{A}{B}$ avec $A = 1$ et $B = X^n - 1$ donc $B' = nX^{n-1}$. On en déduit que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_k = \dfrac{1}{nw_k^{n-1}} = \dfrac{w_k}{nw_k^n} = \dfrac{w_k}{n}$ car $w_k^n = 1$. On a alors la décomposition en éléments simples suivante :

$$R = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{w_k}{X - w_k}$$

▶ **À vous d'appliquer cette technique sur un exemple proche du précédent : exercice 2., puis sur l'exercice 12.**

3 Décomposition dans $\mathbb{R}(X)$

3.1 La théorie

Théorème (décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$).
Soit $R = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{R}(X)$ irréductible, on décompose B en produit d'irréductibles :

$$B = \beta\prod_{i=1}^{r}\underbrace{(X-\lambda_i)^{m_i}}_{\text{les racines réelles}}\prod_{j=1}^{s}\underbrace{(X^2+b_jX+c_j)}_{\text{discriminant négatif}}^{n_j}$$

La fraction rationnelle R s'écrit de façon unique sous la forme :

$$R = E + \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_i}\frac{a_{ik}}{(X-\lambda_i)^k} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n_j}\frac{\mu_{jk}X+\nu_{jk}}{(X^2+b_jX+c_j)^k}$$

Tous les coefficients a_{ik}, μ_{jk} et ν_{jk} sont des réels uniques, E est la partie entière.

Remarque : La démonstration est hors programme et l'important est de savoir faire une telle décomposition en pratique.

Exemple : La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de $R = \dfrac{X^2+3}{(X-1)^3X(X^2+1)^2}$ est de la forme :

$$F = \frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{X} + \frac{eX+f}{(X^2+1)^2} + \frac{gX+h}{X^2+1}$$

où a, b, c, d, e, f, g et h sont des réels à déterminer.

Remarque : Il faut surtout retenir que c'est un polynôme de degré au plus 1 que l'on doit chercher au numérateur si le dénominateur est un polynôme irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ de degré 2.

3.2 En pratique

Il y a deux méthodes pour décomposer une fraction rationnelle dans $\mathbb{R}(X)$:
Méthode 1 : on décompose dans $\mathbb{C}(X)$ puis on réunit chaque dénominateur avec son dénominateur conjugué.
Méthode 2 : on décompose directement dans $\mathbb{R}(X)$.

Exemple 5 : Illustrons la méthode 1. On reprend l'exemple 1, on avait trouvé la décomposition suivante dans $\mathbb{C}(X)$:

$$\frac{X^5}{X^4-1} = X + \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1} - \frac{1}{X-i} - \frac{1}{X+i}\Big)$$

On regroupe les racines avec leurs racines conjuguées : $-\dfrac{1}{X-i} - \dfrac{1}{X+i} = -\dfrac{2X}{X^2+1}$. Ce qui nous donne la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$:

$$\frac{X^5}{X^4-1} = X + \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1} - \frac{2X}{X^2+1}\Big)$$

Remarque : À présent, vous pouvez calculer sans problème $\displaystyle\int_2^3 \frac{t^5}{t^4-1}dt$.

Exemple 6 : On va illustrer la méthode 2 en décomposant directement dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle : $R = \dfrac{1}{(X-1)^2(X^2+X+1)}$. Cette fraction est irréductible et de degré strictement négatif. La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ est à rechercher sous la forme :

$$R = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{cX+d}{X^2+X+1} (\bigstar)$$

où a, b, c et d sont à déterminer.

• Détermination de b. On utilise la méthode de multiplication-évaluation :

$$[(X-1)^2R](1) = \frac{1}{3} = b$$

• Détermination de a. On utilise la méthode de multiplication-dérivation-évaluation :

$$[(X-1)^2R]'(1) = -\frac{1}{3} = a$$

• Détermination de c et d. On multiplie la relation $(\bigstar)$ par X^2+X+1 et on évalue en une racine de ce polynôme, par exemple j. Détaillons ceci :

$$(X^2+X+1)R = \frac{X^2+X+1}{(X-1)^2(X^2+X+1)} = \frac{a(X^2+X+1)}{X-1} + \frac{b(X^2+X+1)}{(X-1)^2} + \frac{(cX+d)(X^2+X+1)}{X^2+X+1}$$

On simplifie :

$$(X^2+X+1)R = \frac{1}{(X-1)^2} = \frac{a(X^2+X+1)}{X-1} + \frac{b(X^2+X+1)}{(X-1)^2} + cX + d$$

On évalue en j :

$$[(X^2+X+1)R](j) = \frac{1}{(j-1)^2} = 0 + 0 + cj + d$$

Or $\dfrac{1}{(j-1)^2} = \dfrac{1}{3}\Big(1+j\Big)$ en sautant quelques étapes de calcul. On en déduit que $cj + d = \dfrac{1}{3}\Big(1+j\Big)$, c'est-à-dire :

$$\Big(-\frac{1}{2}c + d\Big) + \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}ic\Big) = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\Big)$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on trouve $c = d = \dfrac{1}{3}$. D'où la décomposition :

$$R = \frac{1}{3}\Big(\frac{-1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{X+1}{X^2+X+1}\Big)$$

► **À vous d'essayer avec la fraction rationnelle F de l'exercice 9.**

Une fois que vous avez bien compris ces différentes méthodes et résolu les exercices du cours, vous pouvez commencez les exercices d'entraînement : 1-5-7-13-14.